Kommutative Algebra

6. Übungsblatt für den 29. April 2008

Wir besprechen am 29.4. auch das 5. Übungsblatt.

(1) (Ringerweiterungen) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x]$ und seine Unterringe $\mathbb{Q}[\![x^3 - 3x^2 + 2x]\!]$ und $\mathbb{Q}$.
  (a) Ist $\mathbb{Q}[x]$ ganz über $\mathbb{Q}[\![x^3 - 3x^2 + 2x]\!]$?
  (b) Ist $\mathbb{Q}[\![x^3 - 3x^2 + 2x]\!]$ ganz über $\mathbb{Q}$?

(2) Sei R ein Ring, der $\mathbb{C}[t]$ als Unterring (mit demselben Einselement) enthält. Wir nehmen an, dass R ganz über $\mathbb{C}[t]$ ist. Zeigen Sie, dass R kein Körper ist. *Hinweis:* Wenn R ein Körper ist, so ist $\frac{1}{t}$ in R. Also ist $\frac{1}{t}$ ganz über $\mathbb{C}[t]$. Verwenden Sie jetzt das Polynom in $\mathbb{C}[t][t_1]$, dessen Nullstelle $\frac{1}{t}$ ist, um zu zeigen, dass t algebraisch über $\mathbb{C}$ ist – Widerspruch.

(3) Finden Sie eine Noethersche Normalisierung von $R = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ über $\mathbb{Q}$, wobei $I = \langle x^5 + xyz + 1\rangle$. Finden Sie also $r \in \mathbb{N}_0$ und $y_1, \ldots, y_r \in R$, sodass $(y_1, \ldots, y_r)$ algebraisch unabhängig ist, und R ganz über $\mathbb{Q}[\![y_1, \ldots, y_r]\!]$ ist.

(4) Finden Sie eine Noethersche Normalisierung von $R = \mathbb{Q}[x, y, z]/I$ über $\mathbb{Q}$, wobei $I = \langle xyz + 1\rangle$. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass R ganz über $\mathbb{Q}[\![(y - x) + I, (z - x) + I]\!]$ ist. Um zu zeigen, dass $\big((y - x) + I, (x - z) + I\big)$ algebraisch unabhängig ist, verwenden Sie, dass $(x + I, y + I)$ eine Transzendenzbasis von R über $\mathbb{Q}$ ist.

(5) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2) &= {t_1}^2 \\ f_2(t_1, t_2) &= {t_2}^2 \\ f_3(t_1, t_2) &= t_1 \cdot t_2. \end{aligned}$$

Sei I das Ideal von $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, t_1, t_2]$, das durch $\{x_1 - f_1(t_1, t_2), x_2 - f_2(t_1, t_2), x_3 - f_3(t_1, t_2)\}$ erzeugt wird. Zeigen Sie:
  (a) $I \cap \mathbb{R}[t_1, t_2] = \{0\}$.
  (b) Der Transzendenzgrad von $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, t_1, t_2]/I$ über $\mathbb{R}$ ist 2.