**Kommutative Algebra**

**5. Übungsblatt für den 22. April 2008**

Wir besprechen am 22.4. auch die Beispiele 4, 5 und 6 des 4. Übungsblatts.

(1) Sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die ganz über $\mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie $q \in \mathbb{Z}$.

(2) Sei $R := \mathbb{Q}[x, y]/I$, wobei $I := \langle x^2 + xy + 1 \rangle$. Mit $Q$ bezeichnen wir den Unterring $\{q + I \mid q \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie:

(a) $x + I$ ist nicht ganz über $Q$.

(b) $x + I$ ist ganz über $Q[\![y + I]\!]$.

(3) Sei $R := \mathbb{Z}[\![\sqrt[3]{2}]\!]$, und sei $x := 5 + \sqrt[3]{2}$. Da $x \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$, und da $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})^2$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, ist auch $x$ ganz über $\mathbb{Z}$. Im folgenden Beispiel konstruieren wir ein Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ mit führendem Koeffizienten 1, das $x$ als Nullstelle hat.

(a) Sei $b_0 := 1$, $b_1 := \sqrt[3]{2}$, $b_2 := (\sqrt[3]{2})^2$. Finden Sie eine $3 \times 3$-Matrix $A$, sodass

$$\begin{pmatrix} b_0 x \\ b_1 x \\ b_2 x \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$.