Kommutative Algebra
4. Übungsblatt für den 15.April 2008

Wir besprechen am 15.4. auch das Beispiel 5 des 3. Übungsblatts.

(1) (Quotienten von Idealen) Seien A, B Ideale von $\mathbb{Z}$. Mit $(A : B)$ kürzen wir $\{c \in \mathbb{Z} \mid \text{für alle } b \in B : c\,b \in A\}$ ab. Berechnen Sie:
  (a) $((12) : (4))$.
  (b) $((4) : (12))$.
  (c) $((12) : (30))$.
  (d) Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $((a) : (b))$.

(2) (Produkt von Idealen) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien A, B Ideale von R mit $A = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ und $B = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Zeigen Sie, dass das Ideal $A \cdot B$ von der Menge $\{a_i b_j \mid (i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}\}$ erzeugt wird.

(3) (Berechnen des Schnitts zweier Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und seien I und J Ideale von R. Seien $\hat{I}$ und $\hat{J}$ die Ideale von $R[x]$, die durch

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \{\textstyle\sum_{k=0}^{n} i_k x^k \mid n \in \mathbb{N}_0, i_0, \ldots, i_n \in I\}, \\ \hat{J} &= \{\textstyle\sum_{k=0}^{n} j_k x^k \mid n \in \mathbb{N}_0, j_0, \ldots, j_n \in J\} \end{aligned}$$

gegeben sind.
  (a) Zeigen Sie, dass $\hat{I}$ ein Ideal von $R[x]$ ist.
  (b) Nehmen Sie an, dass $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis von I ist. Geben Sie eine Basis von $\hat{I}$ an!
  (c) Nehmen Sie an, dass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von J ist. Geben Sie eine Basis von $\hat{J} \cdot (x-1)$ an!
  (d) Zeigen Sie

$$\{r \in R \mid r\,x^0 \in \hat{I} \cdot (x) + \hat{J} \cdot (x-1)\} = I \cap J.$$

(4) (Prime Ideale) Zeigen Sie, dass jedes prime Ideal eines kommutativen Ringes mit Eins auch schnitt-irreduzibel ist.

(5) (Prime Ideale) Sei $R := \mathbb{Q}[x, y, z]$. Zeigen Sie:
  (a) $\langle x,\, y \rangle$ ist prim.
  (b) $\langle x^2 y,\, x y^3 \rangle$ ist nicht prim.

(6) (Primäre Ideale) Sei $R := \mathbb{Q}[x, y]$. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Ideale, ob es primär, und ob es schnitt-irreduzibel ist.
  (a) $A = \langle x^4,\, x^2 y,\, y^3 \rangle$.
  (b) $B = \langle x^4,\, y^3 \rangle$.
  (c) $C = \langle x^2 y \rangle$.