

Kommutative Algebra
3. Übungsblatt für den 8. April 2008

Wir besprechen am 8.4. auch das Beispiel 5 des 2. Übungsblatts.

- (1) (Irreduzible Elemente) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R$ mit $r \neq 0$.
- (a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
- (i) r ist irreduzibel.
- (ii) Das Ideal (r) ist ein maximales Element in der Menge aller Hauptideale von R , die ungleich R sind.
- (b) Zeigen Sie: Wenn r irreduzibel ist, ist auch jedes zu r assoziierte Element irreduzibel.
- (2) (Größter gemeinsamer Teiler) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= xy^2 + x^2y^3 \\ g &= y + xy + xy^2 + x^2y^2. \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$.
- (b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(y)[x]$.
- (c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[x, y]$.
- (d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x, y)$.

Dabei ist $\mathbb{Q}(x)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Q}[x]$. *Hinweis:* Sie können die Funktion `PoliesExtendedGCD` aus der Datei `poliesGCD.m` verwenden, die den g.g.T. in $K[x]$ (K Körper) berechnet.

- (3) (Größter gemeinsamer Teiler) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= xy + x^3y + x^2y^2 + xy^3 \\ g &= x + x^3 + y + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$.
- (b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(y)[x]$.
- (c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[x, y]$.
- (d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x, y)$.
- (4) (Größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von $3220 + 5520x + 2300x^2 + 460x^3 + 460x^4$ und $-230 - 230x + 46x^3 + 46x^4$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.
- (5) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich, und seien r, d, f_1, \dots, f_n in R . Wir nehmen an, dass d ein ggT von f_1, \dots, f_n ist. Zeigen Sie, dass dann rd ein ggT von rf_1, \dots, rf_n ist. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass es einen ggT von rf_1, \dots, rf_n gibt.