Kommutative Algebra
2. Übungsblatt für den 1.April 2008

Wir besprechen am 1.4. auch die Beispiele 4, 5 und 6 des 1. Übungsblatts.

(1) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.

(2) (Integritätsbereiche) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie für $r \neq 0$ die Abbildung $x \mapsto r \cdot x$.)

(3) (Prime Elemente) Sei R ein Integritätsbereich. Ein Element $r \in R$ ist *prim*, wenn r nicht invertierbar ist, und für alle $f, g \in R$ gilt: $r | f \cdot g \Rightarrow (r | f$ oder $r | g)$. Ein Ideal I von R ist *prim*, wenn $I \neq R$ und für alle $a, b \in R$ gilt: $a \cdot b \in I \Rightarrow (a \in I$ oder $b \in I)$. Zeigen Sie:
   (a) Ein Element r ist genau dann prim, wenn das Hauptideal (r) prim ist.
   (b) Wenn r prim und u invertierbar ist, so ist auch $r \cdot u$ prim.

(4) (Kettenbedingungen) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
   (a) Für jedes Ideal I von R gibt es eine endliche Teilmenge S von I, sodass $\langle S \rangle = I$.
   (b) Die Menge aller Ideale von R, geordnet mit $\subseteq$, erfüllt die (ACC).
   (c) Jede nichtleere Teilmenge der Menge aller Ideale von R hat ein maximales Element.

(5) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass folgende beiden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
   (b) R ist ein Körper.