Kommutative Algebra
12. Übungsblatt für den 17. Juni 2008

(1) Sei $V \subseteq \mathbb{C}^n$ eine Varietät, und sei $\varphi \in \mathbb{C}[V]$ so, dass $\varphi(v) \neq 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass es ein $\psi \in \mathbb{C}[V]$ gibt, sodass $\varphi(v) \cdot \psi(v) = 1$ für alle $v \in V$. *Hinweis:* Wenn $V = \mathbb{I}(f_1, \dots, f_s)$ und $\varphi = \overline{g}|_V$, so ist $f_1 = \cdots = f_s = g = 0$ unlösbar.

(2) Seien $V_1 \subseteq \mathbb{C}^m$ und $V_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ Varietäten. Zeigen Sie, dass

$$W = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{C}^{m+n} \,|\, \overline{x} \in V_1, \, \overline{y} \in V_2\}$$

eine Varietät in $\mathbb{C}^{m+n}$ ist. (Bonusfrage: Was ist die Dimension von W?)

(3) Wir betrachten die Varietäten $V := \mathbb{C}^2$ und $W := \mathbb{V}(x\,y - z^2)$ und die Abbildung $G : V \to W$, $(t_1, t_2) \mapsto (t_1^2, t_2^2, t_1\,t_2)$. Wir bilden die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}[W] \to \mathbb{C}[V]$, die durch

$$\varphi(h)(v) = h(G(v))$$

für $h \in \mathbb{C}[W]$, $v \in V$ definiert ist.

(a) Ist φ ein Ringhomomorphismus?

(b) Ist φ injektiv?

(4) Wir betrachten den Isomorphismus F der Varietät $V := \mathbb{C}^2$ auf die Varietät $W := \mathbb{V}(x_3 - x_1^2\,x_2)$, der durch $F(t_1, t_2) := (t_1, t_2, t_1^2\,t_2)$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ gegeben ist.

(a) Finden Sie einen Isomorphismus φ von $\mathbb{C}[W]$ nach $\mathbb{C}[V]$.

(b) Berechnen Sie $\varphi(\pi_3)(t_1, t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.

(5) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ so, dass

$$\overline{f_1}(\overline{g_1}(t_1, t_2), \overline{g_2}(t_1, t_2)) = t_1$$

und

$$\overline{f_2}(\overline{g_1}(t_1, t_2), \overline{g_2}(t_1, t_2)) = t_2$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Das Polynom $J \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$ ist definiert durch

$$J(t_1, t_2) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(t_1, t_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(t_1, t_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass J ein konstantes Polynom sein muss.