Kommutative Algebra
11. Übungsblatt für den 10. Juni 2008

(1) Sei k ein Körper, sei $V \subseteq k^n$ eine Varietät, und sei M eine Menge, die Zariski-dicht in V ist. Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\overline{f}|_M = 0$ auch gilt, dass $\overline{f}|_V = 0$.

(2) Finden Sie ein Polynom $\neq 0$ in dem von $\{x^2 - 5x + 6, y^3 + 5y^3x^4 + x^8\}$ erzeugten Ideal von $\mathbb{Q}[x, y]$, das nur von y abhängt.

(3) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle y^3 - z^2, -y^2 + xz, xy - z, x^2 - y\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass $((x + y) + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $((-x^3 + z + 3) + I)$ algebraisch abhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ mit $f \neq 0$, sodass $\overline{f}((x + y + 1) + I, (x + z) + I) = 0 + I$.

(4) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass $(x + I, y + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (b) Finden Sie $f \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $f \neq 0$ und $f(x, y, z^3 + x + 1) \in \langle x, y\rangle$.
  (c) Finden Sie $g \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $g \neq 0$ und $g(x, y, z^3 + x + 1) \in \langle z\rangle$.
  (d) Finden Sie $h \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ mit $h \neq 0$ und $h(x, y, z^3 + x + 1) \in I = \langle z\rangle \cap \langle x, y\rangle$.

(5) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass $(z + I)$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass für alle $q(x, y, z) \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ gilt, dass $(z+I, q(x, y, z)+I)$ algebraisch abhängig ist. (Hinweis: $\langle xz, yz\rangle = \langle x, y\rangle \cap \langle z\rangle$.)
  (c) Begründen Sie durch Zitieren eines passenden Satzes aus den Unterlagen, dass $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ algebraisch über dem Unterring $\mathbb{Q}[\![z + I]\!]$ ist.

(6) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ mit $I = \langle xz, yz\rangle$.
  (a) Zeigen Sie, dass für alle $q(x, y, z) \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ gilt, dass $(x + I, y + I, q(x, y, z) + I)$ algebraisch abhängig ist.
  (b) Begründen Sie durch Zitieren eines passenden Satzes aus den Unterlagen, dass $\mathbb{Q}[x, y, z]/I$ algebraisch über dem Unterring $\mathbb{Q}[\![x + I, y + I]\!]$ ist.
  (c) Haben wir jetzt im Widerspruch zu Korollar 2.9 aus den Unterlagen über Ringerweiterungen Transzendenzbasen verschiedener Kardinalität gefunden?

(7) Berechnen Sie jeweils die Dimension der folgenden Varietäten $\mathbb{V}(I)$ in $\mathbb{C}^3$, indem Sie eine Teilmenge von $\{x + I, y + I, z + I\}$ mit maximaler Kardinalität finden, die algebraisch unabhängig ist.
  (a) $I = \langle y^3 - z^2, -y^2 + xz, xy - z, x^2 - y\rangle$.
  (b) $I = \langle x^2 + y^2 + 1, x + y\rangle$.
  (c) $I = \langle xy^2 - x^2z\rangle$.