

**Kommutative Algebra**  
**10. Übungsblatt für den 3. Juni 2008**

- (1) Wir betrachten  $M = \{(x+1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2\}$  und studieren die Lösungsmenge in  $\mathbb{Q}^1$  und in  $\mathbb{C}^1$ .
- (a) Berechnen Sie  $\mathbb{I}(\mathbb{V}(M))$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (b) Berechnen Sie  $\mathbb{I}(\mathbb{V}(M))$  über  $\mathbb{C}$ .
- (2) Wir betrachten die Teilmenge  $P$  von  $\mathbb{C}^3$ , die durch

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 t_2 \\ t_1 t_3 \\ t_2 t_3 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

gegeben ist. Sei  $J$  das von  $\{x_1 - t_1 t_2, x_2 - t_1 t_3, x_3 - t_2 t_3\}$  erzeugte Ideal von  $\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3]$ .

- (a) Berechnen Sie  $J \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ .
- (b) Berechnen Sie den Zariski-Abschluss  $\mathbb{V}(\mathbb{I}(P))$  von  $P$ .
- (c) Gilt  $P = \mathbb{V}(\mathbb{I}(P))$ ? (Hinweis: Betrachten Sie den Fall  $t_1 t_2 = 0$ ).
- (3) (cf. [1]) Sei  $M = \{t^2 + y^2 + z^2 + 2, 3t^2 + 4y^2 + 4z^2 + 5\}$ , und sei  $\pi(t, y, z) := (y, z)$ .
- (a) Wir rechnen im Körper  $\mathbb{C}$ . Sei  $I := \langle M \rangle_{\mathbb{C}[t,x,y]}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{V}(I \cap \mathbb{C}[y, z]) = \pi(\mathbb{V}(M))$ .
- (b) Wir rechnen im Körper  $\mathbb{R}$ . Sei  $I := \langle M \rangle_{\mathbb{R}[t,x,y]}$ . Zeigen Sie, dass  $\pi(\mathbb{V}(M)) = \emptyset$ , und dass  $\mathbb{V}(I \cap \mathbb{R}[y, z])$  unendlich ist.
- (4) (cf. [1]) *Whitneys Schirmfläche* ist durch die Parametrisierung  $x = uv, y = v, z = u^2$  gegeben.
- (a) (Über  $\mathbb{R}$ ) Zeichnen Sie diese Fläche mit Mathematica.
- (b) (Über  $\mathbb{C}$ ) Finden Sie die Gleichung der kleinsten Varietät, die Whitneys Schirmfläche enthält.
- (5) Finden Sie eine (nichttriviale) Gleichung, die von allen Punkten im  $\mathbb{R}^2$  des *Folium von Descartes*  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$  erfüllt wird. Können Sie alle Lösungen der Gleichung durch die Parametrisierung erreichen?
- (6) Sei  $k$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $V \subseteq k^n$  eine Varietät. Wir nehmen an, dass der Ring  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}(V)$  algebraisch über  $k$  ist. Zeigen Sie, dass  $V$  nur endlich viele Punkte enthält. *Hinweis:* Beispiele:  $n = 1, V = \mathbb{V}(x^2 - 5x + 6)$ , oder  $n = 2, V = \mathbb{V}(x^2 - 5x + 6, y^3 + 5y^3x^4 + x^8)$ .

LITERATUR

- [1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.