

Kommutative Algebra

1. Übungsblatt für den 11. März 2008

- (1) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings R gleich dem ganzen Ring R ist!
- (a) $R = \mathbb{Z}$, $S = \{105, 70, 42, 30\}$.
 - (b) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(4, 3), (6, 5)\}$.
 - (c) $R = \mathbb{Z}_{101}$, $S = \{[75]_{101}\}$.
- (2) (Erzeugen von Idealen) Bestimmen Sie jeweils, ob das von der Menge S erzeugte Ideal $\langle S \rangle$ des Rings $\mathbb{R}[x, y]$ gleich dem ganzen Ring $\mathbb{R}[x, y]$ ist!
- (a) $S = \{xy, x^3y + 1\}$.
 - (b) $S = \{x^2y, xy^2 + 1\}$.
 - (c) $S = \{xy + x, 1 + y^2\}$.
- (3) (Zornsches Lemma) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Ideal von R ist *maximal*, wenn es ein maximales Element in

$$\{I \mid I \text{ ist Ideal von } R \text{ und } I \neq R\}$$

ist. Zeigen Sie, dass jedes von R verschiedene Ideal in einem maximalen Ideal von R enthalten ist! Wo verwenden Sie, dass R ein Einselement hat?

- (4) (Satz von Ramsey) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahlenfolge eine streng monoton fallende, eine streng monoton steigende oder eine konstante (unendliche) Teilfolge enthält.
- (5) (Dicksons Lemma) Für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ definieren wir $(a, b) \leq' (c, d)$, falls $a \leq c$ und $b \leq d$. Beweisen Sie, ohne den Satz von Ramsey zu verwenden, dass jede unendliche Folge $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{N}^2 eine bezüglich \leq' schwach monoton wachsende unendliche Teilfolge enthält.
- (6) (Geometrie) Wir nennen eine Teilmenge T von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine *Viertel ebene*, wenn es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \geq m \text{ und } y \geq n\}.$$

Zeigen Sie, dass jede Vereinigung von beliebig vielen Viertel ebenen eine Vereinigung von endlich vielen Viertel ebenen ist.