Kommutative Algebra
9. Übungsblatt für den 5. Juni 2007

Wir besprechen am 5. Juni 2007 auch die Beispiele 4 bis 7 vom vom 8. Übungsblatt.

(1) (Transzendente Körpererweiterungen) Wir betrachten den Körper $\mathbb{Q}(x)$ und seine Unterkörper $\mathbb{Q}\big(x^3 - 3x^2 + 2x\big)$ und $\mathbb{Q}$.
   (a) Ist $\mathbb{Q}(x)$ algebraisch über $\mathbb{Q}\big(x^3 - 3x^2 + 2x\big)$?
   (b) Ist $\mathbb{Q}\big(x^3 - 3x^2 + 2x\big)$ algebraisch über $\mathbb{Q}$?

(2) Sei R ein Ring, der $\mathbb{C}[t]$ als Unterring (mit demselben Einselement) enthält. Wir nehmen an, dass R ganz über $\mathbb{C}[t]$ ist. Zeigen Sie, dass R kein Körper ist.

(3) Zeigen Sie folgenden Satz, der liefert, dass die Zahl r der algebraisch unabhängigen Elemente in der Noetherschen Normalisierung eindeutig bestimmt ist.

> Sei k ein Körper, und sei B ein kommutativer Ring mit Eins, der k als Unterring (mit demselben Einselement) enthält. Seien $x_1, \ldots, x_n \in B$ so, dass $k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ ein Integritätsbereich ist. Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $y_1, \ldots, y_r \in k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ so, dass $y_1, \ldots, y_r$ paarweise verschieden und algebraisch unabhängig über k sind. Wir nehmen an, dass $k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ ganz über $k[\![y_1, \ldots, y_r]\!]$ ist. Zeigen Sie, dass der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers $Q(k[\![x_1, \ldots, x_n]\!])$ über k gleich r ist.