Kommutative Algebra
8. Übungsblatt für den 22. Mai 2007

Wir besprechen am 22. Mai 2007 auch die Beispiele 2 und 3 vom vom 7. Übungsblatt.

(1) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei I ein Ideal mit $I \neq R$ und $\sqrt{I} = I$. Zeigen Sie, dass es genau eine Darstellung von I als Durschschnitt von Primidealen gibt, von der man kein Primideal weglassen kann.

(2) Sei F ein Körper, E eine Körpererweiterung von F, und sei S eine über F algebraisch unabhängige Teilmenge von E. Sei $e \in E$ so, dass $S \cup \{e\}$ algebraisch abhängig ist. Zeigen Sie, dass e algebraisch über $F(S)$ ist.

(3) Sei F ein Körper, E eine Körpererweiterung von F, und sei S eine Teilmenge von E. Sei $e \in E$ so, dass e algebraisch über $F(S)$ ist und $e \notin S$. Zeigen Sie, dass $S \cup \{e\}$ algebraisch abhängig ist.

(4) Sei E eine Körpererweiterung von F, und seien $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ algebraisch über F. Zeigen Sie, dass $F(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ endlichdimensional, und damit algebraisch, über F ist.

(5) Zeigen Sie, dass $\{\frac{x_1^2+x_1+1}{1}, \frac{x_2^3}{1}\}$ eine Transzendenzbasis von $\mathbb{C}(x_1, x_2) = Q(\mathbb{C}[x_1, x_2])$ über $\mathbb{C}$ ist.

(6) Zeigen Sie, dass jede rationale Zahl, die ganz über $\mathbb{Z}$ ist, bereits in $\mathbb{Z}$ liegt.

(7) Zeigen Sie, dass das von $\{x_1, x_2, x_3\}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ prim ist.