

## Kommutative Algebra

### 6. Übungsblatt für den 8. Mai 2007

Wir besprechen am 8. Mai 2007 auch das Beispiel 2 und folgende verbesserte Version des Beispiels 3 vom 5. Übungsblatt.

- (3) (Berechnen des Schnitts zweier Ideale) Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1, und seien  $I$  und  $J$  Ideale von  $R$ . Seien  $\hat{I}$  und  $\hat{J}$  die Ideale von  $R[x]$ , die durch

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \{ \sum_{k=1}^n i_k p_k \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I, p_1, \dots, p_n \in R[x] \} \\ \hat{J} &= \{ \sum_{k=1}^n j_k q_k \mid n \in \mathbb{N}, j_1, \dots, j_n \in I, q_1, \dots, q_n \in R[x] \}\end{aligned}$$

gegeben sind.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\hat{I}$  ein Ideal von  $R[x]$  ist.  
(b) Nehmen Sie an, dass  $\{a_1, \dots, a_m\}$  eine Basis von  $I$  ist. Geben Sie eine Basis von  $\hat{I}$  an!  
(c) Nehmen Sie an, dass  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $J$  ist. Geben Sie eine Basis von  $\hat{J} \cdot (x-1)$  an!  
(d) Zeigen Sie

$$\{r \in R \mid r x^0 \in \hat{I} \cdot (x) + \hat{J} \cdot (x-1)\} = I \cap J.$$

- (1) Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, seien  $A, B$  Ideale von  $R$ , und sei  $P$  ein Primideal von  $R$ . Mit  $\sqrt{A}$  bezeichnen wir das Radikal von  $A$ . Zeigen Sie:

- (a) Wenn  $A \cap B \subseteq P$ , so gilt  $A \subseteq P$  oder  $B \subseteq P$ .  
(b)  $\sqrt{\sqrt{P}} = P$ .  
(c)  $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$ .

- (2) Sei  $R$  ein kommutativer Noetherscher Ring mit Eins, und seien  $A$  und  $B$  Ideale von  $R$ , sodass  $A \subseteq \sqrt{B}$ . Sei  $A^0 := R$ ,  $A^1 := A$ ,  $A^2 := A \cdot A$  (Idealprodukt), und  $A^n := A \cdot A^{n-1}$  für  $n \geq 3$ . Sei  $\{a_1, \dots, a_m\}$  eine Basis von  $A$ .

- (a) Finden Sie eine Basis von  $A^n$ .  
(b) Zeigen Sie, dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $A^n \subseteq B$ .

- (3) \* Sei  $R$  ein kommutativer Noetherscher Ring mit Eins, sei  $A$  ein Ideal von  $R$ , und sei  $B$  ein primäres Ideal von  $R$ . Wir nehmen an, dass

$$(B : A) = B$$

gilt. Zeigen Sie  $A \not\subseteq \sqrt{B}$ .

- (4) Sei  $F$  ein Körper, sei  $E$  eine Körpererweiterung von  $F$ , sei  $n \in \mathbb{N}$ , und sei  $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ . Zeigen Sie, dass das Ideal

$$I := \{f \in F[x_1, \dots, x_n] \mid \bar{f}(e_1, \dots, e_n) = 0\}$$

ein primes Ideal des Polynomrings  $F[x_1, \dots, x_n]$  ist.

- (5) Sei  $F$  ein unendlicher Körper, und sei  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  mit  $f \neq 0$ . Zeigen Sie, dass es  $(e_1, \dots, e_n) \in F^n$  gibt, sodass  $\bar{f}(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ .