Kommutative Algebra
5. Übungsblatt für den 24.April 2007

Wir besprechen am 24.4. auch die Beispiele 3, 4 und 5 des 4. Übungsblatts.

(1) (Hilbertscher Basissatz) In den folgenden Beispielen ist I jeweils ein Ideal von $\mathbb{Z}[x]$. Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das Ideal

$$I_n := \{z \in \mathbb{Z} \,|\, \exists p \in \mathbb{Z}[x] : \deg(p) \leq n-1 \text{ und } z\,x^n + p \in I\}$$

von $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie daraus eine endliche Menge von Erzeugern von I!

(a) $I := (x^2+2)$. (Mit (a) kürzen wir das von a erzeugte Ideal ab.)

(b) $I := \{f \in \mathbb{Z}[x] \,|\, \text{ für alle } \xi \in \mathbb{Z} : 3 \text{ teilt } \overline{f}(\xi)\}$.

(c) $I := \{f \in \mathbb{Z}[x] \,|\, \text{ für alle } \xi \in \mathbb{Z} : 15 \text{ teilt } \overline{f}(\xi)\}$.

(2) (Quotienten von Idealen) Seien A, B Ideale von $\mathbb{Z}$. Mit $(A : B)$ kürzen wir $\{c \in \mathbb{Z} \,|\, \text{ für alle } b \in B : c\,b \in A\}$ ab. Berechnen Sie:

(a) $((12) : (4))$.

(b) $((4) : (12))$.

(c) $((12) : (30))$.

(d) Berechnen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $((a) : (b))$.

(3) (Berechnen des Schnitts zweier Ideale) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und seien I und J Ideale von R. Seien $\hat{I}$ und $\hat{J}$ die Ideale von $R[x]$, die durch

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \{i\,p \,|\, i \in I, p \in R[x]\} \\ \hat{J} &= \{j\,q \,|\, j \in J, q \in R[x]\} \end{aligned}$$

gegeben sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{I}$ ein Ideal von $R[x]$ ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis von I ist. Geben Sie eine Basis von $\hat{I}$ an!

(c) Nehmen Sie an, dass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von J ist. Geben Sie eine Basis von $\hat{J} \cdot (x-1)$ an!

(d) Zeigen Sie

$$\{r \in R \,|\, r\,x^0 \in \hat{I} \cdot (x) + \hat{J} \cdot (x-1)\} = I \cap J.$$