Kommutative Algebra
4. Übungsblatt für den 17.April 2007

Wir besprechen am 17.4. auch die Beispiele 3 und 4 des 3. Übungsblatts.

(1) (Größter gemeinsamer Teiler) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= xy^2 + x^2y^3 \\ g &= y + xy + xy^2 + x^2y^2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$.
(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(y)[x]$.
(c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[x, y]$.
(d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x, y)$.

Dabei ist $\mathbb{Q}(x)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Q}[x]$. *Hinweis:* Sie können die Funktion `PoliesExtendedGCD` aus der Datei `poliesGCD.m` verwenden, die den g.g.T. in $K[x]$ (K Körper) berechnet.

(2) (Größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von $3220 + 5520x + 2300x^2 + 460x^3 + 460x^4$ und $-230 - 230x + 46x^3 + 46x^4$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.

(3) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich, sei $f \in R[x]$, und seien $g, h \in Q(R)[x]$ so, dass $f = g \cdot h$. Zeigen Sie, dass es $\alpha, \beta \in Q(R)$ gibt, sodass $\alpha\, g \in R[x]$, $\beta\, h \in R[x]$ und $f = (\alpha\, g) \cdot (\beta\, h)$.

(4) Beweisen Sie [1, p. 149, Corollary 4]:

> Suppose that $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ have positive degree in x_1. Then f and g have a common factor in $k[x_1, \ldots, x_n]$ of positive degree in x_1 if and only if they have a common factor in $k(x_2, \ldots, x_n)[x_1]$.

Hinweis: k ist ein Körper, $k(x_2, \ldots, x_n)$ ist der Quotientenkörper von $k[x_2, \ldots, x_n]$.

(5) Sei R ein faktorieller Integritätsbereich, und seien $r, d, f_1, \ldots, f_n$ in R. Wir nehmen an, dass d ein ggT von $f_1, \ldots, f_n$ ist. Zeigen Sie, dass dann rd ein ggT von $rf_1, \ldots, rf_n$ ist.

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.