

Kommutative Algebra
3. Übungsblatt für den 27. März 2007
korrigierte Version

Wir besprechen am 27.3. auch die Beispiele 4, 5 und 6 des 2. Übungsblatts.

- (1) (Irreduzible Elemente) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $r \in R$ mit $r \neq 0$.
 - (a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
 - (i) r ist irreduzibel.
 - (ii) Das Ideal (r) ist ein maximales Element in der Menge aller Hauptideale von R , die ungleich R sind.
 - (b) Zeigen Sie: Wenn r irreduzibel ist, ist auch jedes zu r assoziierte Element irreduzibel.
- (2) (Gaußsche ganze Zahlen) Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod{4}$. Zeigen Sie, dass es höchstens ein Paar natürlicher Zahlen (a, b) mit $a < b$ und $a^2 + b^2 = p$ gibt. *Hinweis:* Betrachten Sie eine Zerlegung $p = (a+bi)(c+di)$ von p in nicht invertierbare Elemente, und weisen Sie nach, dass $a+bi$ und $c+di$ prime Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ sind. Warum ergibt $c^2 + d^2 = p$ keine zweite Lösung?
- (3) (Hauptidealbereiche) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealbereich?
- (4) (Gaußsche ganze Zahlen) [1, S. 510] Sei π ein Gaußsches Primelement. Man beweise, dass π und $\bar{\pi}$ genau dann assoziiert sind, wenn π zu einer Primzahl assoziiert ist oder wenn $\pi\bar{\pi} = 2$ ist.

LITERATUR

- [1] M. Artin. *Algebra*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. Translated from the 1991 English original by Annette A'Campo.