

Kommutative Algebra

2. Übungsblatt für den 20. März 2007

Wir besprechen am 20.3. auch die Beispiele 5 und 6 des 1. Übungsblatts.

- (1) (Invertierbare Elemente) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
 - (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
 - (b) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich R ist.
- (2) (Integritätsbereiche) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie für $r \neq 0$ die Abbildung $x \mapsto r \cdot x$.)
- (3) (Prime Elemente) Sei R ein Integritätsbereich. Ein Element $r \in R$ ist *prim*, wenn r nicht invertierbar ist, und für alle $f, g \in R$ gilt: $r|f \cdot g \Rightarrow (r|f \text{ oder } r|g)$. Ein Ideal I von R ist *prim*, wenn $I \neq R$ und für alle $a, b \in R$ gilt: $a \cdot b \in I \Rightarrow (a \in I \text{ oder } b \in I)$. Zeigen Sie:
 - (a) Ein Element r ist genau dann prim, wenn das Hauptideal (r) prim ist.
 - (b) Wenn r prim und u invertierbar ist, so ist auch $r \cdot u$ prim.
- (4) (Faktorringer) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei I ein Ideal von R . Zeigen Sie, dass der Faktorring R/I genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn das Ideal I prim ist.
- (5) (Einfache Ringe) Ein Ring R ist *einfach*, wenn er keine Ideale außer $\{0\}$ und R hat. Zeigen Sie, dass folgende beiden Behauptungen äquivalent sind:
 - (a) R ist ein einfacher kommutativer Ring mit Eins, und $|R| \geq 2$.
 - (b) R ist ein Körper.
- (6) (Maximale Ideale) Zeigen Sie, dass jedes maximale Ideal eines kommutativen Rings mit Eins automatisch prim ist. Gilt die Umkehrung? (*Hinweis:* $\mathbb{Q}[x, y]$.) Gilt die Umkehrung für endliche kommutative Ringe mit Eins?