

## Kommutative Algebra

### 11. Übungsblatt für den 19. Juni 2007

Wir besprechen am 19. Juni 2007 auch das Beispiel 4 vom 10. Übungsblatt.

- (1) Berechnen Sie jeweils eine Gröbnerbasis folgender Ideale:
  - (a)  $\langle -1 - xy + y^2 + xy^2, -1 + y^2 \rangle$ , lexikographische Ordnung,  $x > y$ .
  - (b)  $\langle -1 + ab + a^2c, 2 + bc^3 \rangle$ , lexikographische Ordnung,  $a > b > c$ .

Für die folgenden Beispiele verwenden wir folgende Definition.

Sei  $k$  ein Körper,  $s \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $f, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Sei  $\leq$  eine zulässige Ordnung auf  $(\mathbb{N}_0)^n$ . Dann ist  $r$  ein möglicher Rest bei der Division von  $f$  durch  $F$ , abgekürzt  $f \rightarrow_F r$ , wenn folgendes gilt:

- (1) Es gibt  $a_1, \dots, a_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , sodass  $f = (\sum_{i=1}^s a_i f_i) + r$ .
- (2) Für alle  $i$  mit  $f_i \neq 0$  gilt: kein Monom von  $r$  ist durch  $\text{LM}(f_i)$  teilbar.
- (3) Für alle  $i \in \{1, \dots, s\}$  gilt  $\text{multideg}(a_i f_i) \leq \text{multideg}(f)$ .

Dabei definieren wir  $\text{multideg}(0)$  so, dass  $\text{multideg}(0) < \text{multideg}(g)$  für alle  $g \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ .

- (2) Seien  $f, g, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $F \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ .
  - (a) Zeigen Sie: Wenn  $f \rightarrow_F r$ , dann gilt  $\text{multideg}(r) \leq \text{multideg}(f)$ .
  - (b) Wenn  $S(f, g) \rightarrow_F r$ , dann gilt  $S(f, g) \rightarrow_{F \cup \{r\}} 0$ .
- (3) Sei  $G$  eine endliche Teilmenge eines Ideals  $I$  von  $k[x_1, \dots, x_n]$  mit folgender Eigenschaft:

Für alle  $f \in I \setminus \{0\}$  gibt es ein  $f' \in I$ , sodass  $f \rightarrow_G f'$  und  $f' \neq f$ .

Zeigen Sie, dass  $G \setminus \{0\}$  eine Gröbnerbasis von  $I$  ist.

- (4) Sei  $k$  ein Körper, und sei  $P$  ein Primideal von  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Wir nehmen an, dass der Quotientenkörper  $Q(k[x_1, \dots, x_n]/P)$  algebraisch über  $k$  ist.
  - (a) Sei  $V$  der  $k$ -Vektorraum  $k[x_1, \dots, x_n]/P$ . Zeigen Sie, dass  $V$  endlichdimensional über  $k$  ist.
  - (b) Zeigen Sie, dass  $P$  nur endlich viele Nullstellen besitzt.
- (5) Sei  $k$  ein Körper, und sei  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ . Sei  $i \in \{1, \dots, s\}$ , und sei  $r_i \in k[x_1, \dots, x_n]$  so, dass  $f_i \rightarrow_{F \setminus \{f_i\}} r_i$ . Zeigen Sie:
  - (a) Wenn  $F$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$  ist und  $r_i = 0$ , so ist auch  $F \setminus \{f_i\}$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$ .
  - (b) Wenn  $F$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$  ist und  $r_i \neq 0$ , so ist auch  $G := (F \setminus \{f_i\}) \cup \{r_i\}$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$ .

- (6) Sei  $k$  ein Körper, und sei  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ .
- (a) Zeigen Sie: Wenn  $F$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$  ist, und  $\text{LT}(f_i) \in \langle \text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_{i-1}), \text{LT}(f_{i+1}), \dots, \text{LT}(f_s) \rangle$ , dann ist auch  $F \setminus \{f_i\}$  eine Gröbnerbasis für  $\langle F \rangle$ .
  - (b) Gilt diese Behauptung auch, wenn man das Wort “Gröbnerbasis” beide Male durch “Basis” ersetzt?