Kommutative Algebra
10. Übungsblatt für den 12. Juni 2007

Wir besprechen am 5. Juni 2007 auch die Beispiele 2 und 3 vom vom 9. Übungsblatt.

(1) (Beweisen geometrischer Sätze) Wir betrachten den Satz von Desargues. Seien $S, A, B, C, D, E, F, H, I, J$ Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) S, A, D liegen auf einer Geraden.
(b) S, B, E liegen auf einer Geraden.
(c) S, C, F liegen auf einer Geraden.
(d) A, B, H liegen auf einer Geraden.
(e) D, E, H liegen auf einer Geraden.
(f) A, C, J liegen auf einer Geraden.
(g) D, F, J liegen auf einer Geraden.
(h) B, C, I liegen auf einer Geraden.
(i) E, F, I liegen auf einer Geraden.
(j) E, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(k) F, A, D liegen nicht auf einer Geraden.
(l) F, B, E liegen nicht auf einer Geraden.

Dann liegen H, I, J auf einer Geraden.

(a) Machen Sie eine Skizze für diesen Satz. (Die Skizze wird schön, wenn Sie S als Ausgangspunkt dreier Strahlen zeichnen, A näher bei S liegt als D, E näher bei S liegt als B, und C näher bei S liegt als F.)
(b) Finden Sie ein polynomiales Gleichungssystem, dessen Unlösbarkeit diesen Satz impliziert.
(c) Zeigen Sie dadurch, dass eine Gröbnerbasis des Systems ein konstantes Polynom enthält, dass das System tatsächlich unlösbar ist.

Hinweis: Auf
`http://verdi.algebra.uni-linz.ac.at/Students/KommutativeAlgebra/pappus-beweis-2.m` finden Sie den Beweis des Satzes von Pappus.

(2) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= x^3y^2 \\ p &= 1 + x^3y + 3x^2y^5 \\ q &= 2x^2y + x^2y^2 \end{aligned}$$

Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1\, p + a_2\, q + r$, $\mathrm{multideg}(a_1\, p) \leq \mathrm{multideg}(f)$, $\mathrm{multideg}(a_2\, q) \leq \mathrm{multideg}(f)$, und kein Term in r ein Vielfaches von $\mathrm{LT}(p)$ oder $\mathrm{LT}(q)$ ist.

(3) Sei $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. (Das ist das Beispiel aus der Vorlesung). Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$.
   (a) Zeigen Sie, dass der Rest r (cf. [1, p.63, Theorem 3]) nicht eindeutig bestimmt ist.
   (b) Finden Sie ein Polynom im Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$, das nicht das Nullpolynom ist, und das keinen Term enthält, der ein Vielfaches von xy oder y^2 ist.

(4) Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass der Rest der Division von f durch ein Hauptideal $\langle f_1 \rangle$ eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie also: Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung, sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $f, f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1 \neq 0$. Seien $a, b, r, s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $f = a\,f_1 + r = b\,f_1 + s$. Wir nehmen an, dass kein Term von r und kein Term von s durch $\mathrm{LT}(f_1)$ teilbar ist. Zeigen Sie $r = s$!

(5) Sei $t \in \mathbb{N}$, sei R ein Ring, und seien $c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_t, p_1, \ldots, p_t \in R$. Zeigen Sie

$$\begin{array}{ll} c_1 d_1 & (p_1 - p_2) \\ + & (c_1 d_1 + c_2 d_2)(p_2 - p_3) \\ + & \cdots \\ + & (c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{t-1} d_{t-1})(p_{t-1} - p_t) \\ + & (c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{t-1} d_{t-1} + c_t d_t)\, p_t \\ & = \sum_{i=1}^{t} c_i d_i p_i. \end{array}$$

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.