Kommutative Algebra
1. Übungsblatt für den 13. März 2007

(1) (ACC) Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ heißt *monoton*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Bedingungen äquivalent sind:
   (a) Es gibt keine monotone injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$.
   (b) Für alle monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \to M$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt: $f(n) = f(k)$.

(2) (ACC) Wir betrachten die Halbgruppe $(\mathbb{N}, \cdot)$. Eine nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ ist eine *Unterhalbgruppe* von $(\mathbb{N}, \cdot)$, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ auch $a_1 \cdot a_2$ in A ist. Zeigen Sie, dass nicht jede Unterhalbgruppe endlich erzeugt ist. Finden Sie eine unendliche aufsteigende Kette von Unterhalbgruppen!

(3) (Zornsches Lemma) Sei R ein Ring mit Eins. Ein Ideal von R ist *maximal*, wenn es ein maximales Element in $\{I \mid I \text{ ist Ideal von } R \text{ und } I \neq R\}$ ist. Zeigen Sie, dass jedes von R verschiedene Ideal in einem maximalen Ideal von R enthalten ist! Wo verwenden Sie, dass R ein Einselement hat?

(4) (Satz von Ramsey) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahlenfolge eine streng monoton fallende, eine streng monoton steigende oder eine konstante (unendliche) Teilfolge enthält.

(5) (Dixon's Lemma) Für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ definieren wir $(a, b) \leq' (c, d)$, falls $a \leq c$ und $b \leq d$. Beweisen Sie, ohne den Satz von Ramsey zu verwenden, dass jede unendliche Folge $(x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}^2$ eine bezüglich $\leq'$ schwach monoton wachsende unendliche Teilfolge enthält.

(6) (Ordnungsrelationen) Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Zeigen Sie, dass es eine lineare Ordnung $\leq'$ auf M gibt, sodass für alle $x, y \in M$ gilt: $x \leq y \Rightarrow x \leq' y$.