Informations- und Codierungstheorie
9. Übungsblatt für den 9. Dezember 2008

1. Geben Sie, wenn möglich, jeweils ein Beispiel für Zufallsvariablen X, Y an, die folgende Bedingungen erfüllen.
   (a) $I(X;Y) = H(X)$;
   (b) $I(X;Y) > H(X)$;
   (c) $I(X;Y) = 0$;
   (d) $I(X;X) = 0$.
2. [Ash, 1990, Beispiel 1.2] A single unbiased die is tossed once. If the face of the die is 1,2,3, or 4, an unbiased coin is tossed once. If the face of the die is 5 or 6, the coin is tossed twice. Find the information conveyed about the face of the die by the number of heads obtained.

   Hinweis: Eine Möglichkeit, dieses Experiment zu beschreiben, ist, als Wahrscheinlichkeitsraum
   $$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$
   mit $P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = \frac{1}{24}$ für alle $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ zu wählen. Die Zufallsvariable Y soll die Anzahl der Köpfe angeben.
3. Wir betrachten das Senden eines Bits über einen binären Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit p. Seien X, Y zwei Zufallsvariablen, die die Eingabe und Ausgabe beschreiben. Wir nehmen also an, dass $P[X = 0] = P[X = 1] = \frac{1}{2}$, $P[Y = 0|X = 0] = P[Y = 1|X = 1] = 1 - p$, $P[Y = 1|X = 0] = P[Y = 0|X = 1] = p$.
   (a) Berechnen Sie $C(p) := I(X;Y)$ für alle $p \in [0, 1]$.
   (b) Skizzieren Sie die Funktion $C(p)$, und bestimmen Sie ihre Maxima und Minima.
4. Finden Sie ein Beispiel einer Markovkette (X, Y, Z), für die (X, Z, Y) keine Markovkette ist. *Hinweis:* Warum reicht es, ein Beispiel einer Markovkette mit $I(Y;Z) < I(X;Y)$ zu finden?
5. Seien $X_1 : \Omega \to A_1$, $X_2 : \Omega \to A_2$, $Y_1 : \Omega \to B_1$, $Y_2 : \Omega \to B_2$ Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass für alle $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ und $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ mit $P[X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] > 0$ gilt:

$$(1) \quad P[Y_1 \otimes Y_2 = (b_1, b_2) | X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] = P[Y_1 = b_1 | X_1 = a_1] \cdot P[Y_2 = b_2 | X_2 = a_2].$$

   (a) Zeigen Sie $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1;Y_1) + I(X_2;Y_2)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1;Y_1) + I(X_2;Y_2)$ nicht gelten muss, wenn (1) nicht erfüllt ist.

Literatur

[Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory.* Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.