

Informations- und Codierungstheorie
8. Übungsblatt für den 2. Dezember 2008

1. (cf. [Cover and Thomas, 2006, Problem 5.25]) Seien $p_1 > p_2 \geq p_3 \geq p_4$ so, dass $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ und $p_1 < \frac{1}{3}$. Zeigen Sie, dass in einem mit dem Huffman-Algorithmus erzeugten optimalen binären Code (C_1, C_2, C_3, C_4) für (p_1, p_2, p_3, p_4) das Wort C_1 Länge 2 hat.
2. (cf. [MacKay, 2003, Exercise 8.6]) Die Zufallsvariablen X und Y haben folgende gemeinsame Verteilung:

$P[X = x, Y = y]$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$y = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$y = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$y = 3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$y = 4$	$\frac{1}{4}$	0	0	0

- (a) Berechnen Sie $H(X \otimes Y)$, $H(X)$, $H(Y)$.
 - (b) Berechnen Sie für jedes $y \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Entropie von $X|_{Y=y}$.
 - (c) Berechnen Sie $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$.
3. (a) (cf. [MacKay, 2003, Exercise 8.1]) Consider three independent random variables U, V, W with entropies $H(U), H(V), H(W)$. Let $X := U \otimes V, Y := V \otimes W$. What is $H(X \otimes Y)$? What is $H(X|Y)$?
 - (b) (cf. [MacKay, 2003, Exercise 8.2]) Confirm that it is possible for $H(X|_{Y=b_k})$ to exceed $H(X)$.
4. Wir würfeln einmal. Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die so definiert sind:
 - $X = 0$ genau dann, wenn die Augenzahl gerade ist, $X = 1$ sonst.
 - $Y = 0$ genau dann, wenn die Augenzahl höchstens 3 ist, $Y = 1$ sonst.
 - Z sei die Augenzahl des Wurfes.
 - (a) Berechnen Sie $H(Z|X \otimes Y)$ und $H(X \otimes Y|Z)$.
 - (b) Wieviel erspart das Wissen über $X \otimes Y$ für die Übertragung von Z ? Wie groß ist also $H(Z) - H(Z|X \otimes Y)$?
 - (c) Wieviel erspart das Wissen über Z für die Übertragung von $X \otimes Y$? Wie groß ist also $H(X \otimes Y) - H(X \otimes Y|Z)$?
 - (d) Berechnen Sie $H(X) - H(X|Y)$!
5. (Teile dieses Beispiels sind [Ash, 1990, Beispiel 1.4 (b)]) Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \rightarrow M, Y : \Omega \rightarrow N, Z : \Omega \rightarrow R$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:
 - (a) $H(Y \otimes Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X \otimes Y)$.

(b) $H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$.

6. In diesem Beispiel arbeiten wir an einer Interpretation für $H(X|Y)$. Dazu gehen wir von folgendem Experiment aus: Seien $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_M\}$ und $Y : \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_L\}$ Zufallsvariablen. Wir wollen die Ausgänge von X einem Empfänger übertragen, dem die Ausgänge von Y bereits bekannt sind.

(Das kann man sich so vorstellen: wir wollen dem Empfänger mitteilen, ob das Rouletterad auf “gerade” oder “ungerade” gefallen ist, wissen aber, dass der Empfänger bereits weiß, ob das Rad auf “rot” oder “grün” gefallen ist).

Wie übermitteln Sie dem Empfänger die Ausgänge von X so, dass Sie durchschnittlich nur höchstens $H(X|Y) + 1$ Zeichen pro Ausgang von X und Y brauchen?

Literatur

- [Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory*. Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.
- [Cover and Thomas, 2006] Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006). *Elements of information theory*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition.
- [MacKay, 2003] MacKay, D. J. C. (2003). *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, New York. The book can be viewed at <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html>.