Informations- und Codierungstheorie
7. Übungsblatt für den 25. November 2008

Wir besprechen am 25.11. auch das Beispiel 5 vom 6. Übungsblatt.

1. Konstruieren Sie – etwa mit dem Verfahren von Huffman – optimale binäre Codes für folgende Wahrscheinlichkeiten, berechnen Sie die durchschnittliche Codewortlänge, und vergleichen Sie diese durchschnittliche Länge mit der Entropie.

   (a) [Ash, 1990] $(0.3, 0.25, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05)$

   (b) $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.

   (c) [Ash, 1990] $(.2, .18, .1, .1, .1, .061, .059, .04, .04, .04, .04, .03, .01)$.

2. (a) [Ash, 1990] Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ für die Wahrscheinlichkeiten
   $$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02).$$

   (b) Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ für die Wahrscheinlichkeiten
   $$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02).$$

3. [Ash, 1990] Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Codewortlänge $\overline{n}$ eines optimalen binären Codes für die Ausgänge von X immer $\overline{n} \leq H(X) + 1$ erfüllt.

4. [Cover and Thomas, 2006, Problem 5.21] Zeigen Sie, dass eine Codierung $C : \mathcal{X} \to D^*$ genau dann eindeutig decodierbar ist, wenn die Erweiterung
   $$C^k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C(x_1)C(x_2)\ldots C(x_k)$$
   für jedes $k \geq 1$ eine injektive Abbildung von $\mathcal{X}^k$ nach D^* ist. (Eine der beiden Implikationen ist offensichtlich.)

5. (cf. [Cover and Thomas, 2006, Problem 5.25]) Seien $p_1 > p_2 \geq p_3 \geq p_4$ so, dass $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ und $p_1 > \frac{2}{5}$. Zeigen Sie, dass in einem mit dem Huffman-Algorithmus erzeugten optimalen binären Code (C_1, C_2, C_3, C_4) für (p_1, p_2, p_3, p_4) das Wort C_1 Länge 1 hat.

Literatur

[Ash, 1990] Ash, R. B. (1990). *Information theory.* Dover Publications Inc., New York. Corrected reprint of the 1965 original.

[Cover and Thomas, 2006] Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006). *Elements of information theory.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition.