Informations- und Codierungstheorie
6. Übungsblatt für den 18. November 2008

Wir besprechen am 18.11. auch das Beispiel 5 vom 4. Übungsblatt und das Beispiel 5 vom 5. Übungsblatt.

1. Sei $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_M > 0$, und sei $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_M)$ ein optimaler Code für diese Wahrscheinlichkeiten. Zeigen Sie, dass für alle i, j mit $p_i > p_j$ die Ungleichung $|C_i| \leq |C_j|$ gelten muss. Dabei ist $|C_i|$ die Länge des Codewortes C_i.

2. Sei $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_M)$ ein binärer präfixfreier Code mit $\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{\mathsf{L}(C_i)}} = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}$ optimal für die Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_M)$ mit $p_i := 2^{-\mathsf{L}(C_i)}$ ist.

3. Finden Sie einen optimalen binären Code für folgende Wahrscheinlichkeiten.
   (a) $(0.5, 0.5)$;
   (b) $(0.5, 0.5, 0)$;
   (c) $(0.5, 0.25, 0.25)$;
   (d) $(0.5, 0.25, 0.25, 0)$.

4. Sei $M \geq 2$, und sei $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_M)$ ein optimaler (also präfixfreier) Code für die Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_M)$. Wir nehmen an, dass alle p_i echt größer als 0 sind. Zeigen Sie, dass es zwei gleich lange Codewörter gibt, die bis auf das letzte Zeichen übereinstimmen. *Hinweis:* Wählen Sie ein Codewort maximaler Länge. Was können Sie tun, wenn dieses Wort mit keinem anderen Wort bis auf das letzte Zeichen übereinstimmt?

5. * Beweisen Sie folgenden Satz.

   Sei $k \in \mathbb{N}$, seien $p_1, \ldots, p_k \in (0, 1]$ so, dass $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ und $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_{k-1} \geq p_k > 0$, und sei $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_{k-1})$ ein optimaler binärer Code für die Wahrscheinlichkeiten $(p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1} + p_k)$. Sei $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, C_k)$ gegeben durch $C_i = D_i$ für $i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$, $C_{k-1} = D_{k-1} * 0$, $C_k = D_{k-1} * 1$. Dann ist $\mathcal{C}$ ein optimaler Code für die Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_k)$.