Informations- und Codierungstheorie
5. Übungsblatt für den 11. November 2008

Wir besprechen am 11.11. auch das Beispiel 5 vom 4. Übungsblatt.

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, und sei $p := \frac{k}{n}$. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir
$$g(i) := \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$
Zeigen Sie, dass für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt:
$$g(i) \leq g(k).$$

2. Benutzen Sie das Ergebnis aus Beispiel 1, um zu zeigen, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:
$$\binom{n}{k} \geq \frac{2^{n\,H(\frac{k}{n}, 1-\frac{k}{n})}}{n+1}$$

3. Der "übliche" Binärcode für die natürlichen Zahlen ($C(13)$ ist z.B. 1101) ist kein präfixfreier Code. Daher kann man Zahlenfolgen auch nicht mit diesem Code übertragen (11011 könnte etwa $(13, 1)$ oder $(6, 3)$ bedeuten).
   (a) Finden Sie einen präfixfreien Code für alle natürlichen Zahlen auf dem Alphabet $\{0, 1\}$.
   (b) Finden Sie eine präfixfreie Codierung C für alle natürlichen Zahlen auf $\{0, 1\}$, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{L}(C(n))}{n} = 0$. Dabei ist $\mathsf{L}(C(n))$ die Länge des Codewortes von n.
   (c) Zeigen Sie, dass die mittlere Länge der Codierungen der ersten n Zahlen stets größer oder gleich $\log_2(n)$ ist. Zeigen Sie also
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{L}(C(i)) \geq \log_2(n).$$

4. Sei $\mathbf{C}$ ein präfixfreier Code über einem D-elementigen Alphabet mit den Codewörtern $(C_1, \ldots, C_M)$ der Längen $n_1 \leq \cdots \leq n_M$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind.
   (a) Jedes Wort der Länge n_M ist entweder ein Codewort oder hat ein Codewort als Präfix.
   (b) $\sum_{k=1}^{M} D^{-n_k} = 1$.

5. Sei $K < M$, und sei $(C_1, \ldots, C_K)$ ein präfixfreier Code mit K Codewörtern über einem D-elementigen Alphabet. Finden Sie eine Bedingung, die charakterisiert, ob sich $(C_1, \ldots, C_K)$ zu einem präfixfreien Code $(C_1, \ldots, C_K, C_{K+1}, \ldots, C_M)$ mit M Codewörtern erweitern lässt. *Hinweis:* $(0, 10, 110, 111)$ lässt sich zum Beispiel nicht präfixfrei auf 6 Codewörter erweitern, $(00, 10, 110, 111)$ hingegen schon.

6. Sei $D \geq 2$, $M \in \mathbb{N}$, und seien $n_1, \ldots, n_M \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{D^{n_i}} = 1$. Zeigen Sie, dass $M \equiv 1 \pmod{D-1}$.