Informations- und Codierungstheorie
4. Übungsblatt für den 4. November 2008

Wir besprechen am 4.11. auch die Beispiele 5 und 6 vom 3. Übungsblatt.

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Zeigen Sie
$$\binom{n}{k} \leq 2^{n\,H(\frac{k}{n}, 1-\frac{k}{n})}.$$
Hinweis: $(k + (n-k))^n = n^n$.

2. (a) [2] Zeigen Sie, dass der Code $\{0, 10, 011, 11111\}$ eindeutig decodierbar ist.
   (b) [1] Ist der Code $\{a, c, ad, abb, bad, deb, bbcde\}$ eindeutig decodierbar?

3. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_M\}$ eine Zufallsvariable. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $Y : \Omega^n \to \{x_1, \ldots, x_M\}^n$,
$$Y((\omega_1, \ldots, \omega_n)) := (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)).$$
Sei $\mathcal{C}$ ein eindeutig decodierbarer binärer Code für Y. Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Codewortlänge von $\mathcal{C}$ zumindest $n \cdot H(X)$ sein muss.

4. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to M$, $Y : \Omega \to N$ Zufallsvariablen. Welche Eigenschaften müssen X und Y erfüllen, damit $H(X \otimes Y) = H(X)$ gilt?

5. [3] Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ auf Zahl fällt, N mal. Sei $\beta > 0$, und sei z die Anzahl der Würfe auf Zahl. Wir nennen diese Folge von N Würfen *typisch zum Parameter* β, wenn
$$\left|\frac{1}{N} \cdot \left(-\log_2\left(p^z \cdot (1-p)^{N-z}\right)\right) - H(p, 1-p)\right| \leq \beta.$$
Sei $q(N, \beta)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Folge von N Münzwürfen mit Zahlwahrscheinlichkeit p typisch zum Parameter β ist. Zeigen Sie:
   (a) $\lim_{N\to\infty} q(N, \beta) = 1$.
   (b) Es gibt höchstens $2^{N\cdot(H(p,1-p)+\beta)}$ typische Folgen der Länge N.

Literatur

[1] R. B. Ash. *Information theory.* Dover Publications Inc., New York, 1990. Corrected reprint of the 1965 original.

[2] W. Heise and P. Quattrocchi. *Informations- und Codierungstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.

[3] D. J. C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms.* Cambridge University Press, New York, 2003. The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.