Informations- und Codierungstheorie
3. Übungsblatt für den 28. Oktober 2008

1. Zeigen Sie, dass für unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt: $H(X \otimes Y) = H(X) + H(Y)$.

2. Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ für folgende Zufallsvariablen:

   (a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, $X((\omega_1, \omega_2)) := \omega_1 - \omega_2$.

   (b) X ist die Anzahl der Würfe auf "Zahl" bei 2-maligem Werfen einer Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p "Zahl" zeigt.

3. Bestimmen Sie die Entropie $H(X)$ für folgende Zufallsvariablen:

   (a) X nimmt die Werte (a, b, c) mit Wahrscheinlichkeiten $(0, 0.6, 0.4)$ an.

   (b) X nimmt die Werte (a, b, c, d) mit Wahrscheinlichkeiten $(0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$ an.

4. Sei $X : \Omega \to A$ eine Zufallsvariable, und sei $X^{[2]} : \Omega^2 \to A^2$, $X((\omega_1, \omega_2)) := (X(\omega_1), X(\omega_2))$. Zeigen Sie $H(X^{[2]}) = 2\ H(X)$.

5. Zeigen Sie:

   $$H(p,\ (1-p)\cdot q,\ (1-p)\cdot(1-q)) = H(p, 1-p) + (1-p)\cdot H(q, 1-q).$$

   Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

6. Sei $X : \Omega \to A$ eine Zufallsvariable. Wir definieren eine Zufallsvariable Y durch

   $$Y(\omega) := -\log_2(P(\{\omega' \in \Omega \mid X(\omega') = X(\omega)\})) = -\log_2(P[X = X(\omega)]).$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert von Y!