Informations- und Codierungstheorie
2. Übungsblatt für den 21. Oktober 2008

1. Sie werfen drei Mal eine faire 5 Schilling-Münze, und notieren die Anzahl von "Zahl" und "Lippizaner". Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl von "Zahl". Bestimmen Sie die Varianz von X. Geben Sie dazu einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an, der für dieses Problem geeignet ist, und beschreiben Sie die Funktion X.

2. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$, und sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie:
$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$
Ist die Voraussetzung $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ notwendig?

3. Wie groß ist bei zweimaligem Würfeln die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme größer als 7 ist, wenn wir schon wissen, dass das Produkt der Augenzahlen größer als 8 ist?

4. Wir würfeln zweimal und werfen eine Münze einmal. Fällt die Münze auf "Zahl", zählen wir beide Augenzahlen der Würfel zusammen, fällt die Münze auf "Kopf", so zählen wir nur die höhere Augenzahl der beiden Würfe. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable an, die dieses Experiment beschreiben.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf "Kopf" gefallen ist, wenn wir schon wissen, dass das Ergebnis des Experiments die Zahl 6 ist?

5. ([1, Exercise 3.12]) Eine Urne enthält genau eine Kugel, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder weiß oder schwarz ist. Eine weiße Kugel wird in die Urne dazugelegt, die Urne geschüttelt, und eine Kugel wird herausgenommen. Die herausgenommene Kugel ist weiß. (Die Urne ist also wieder im gleichen Zustand wie zuvor.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jetzt in der Urne eine weiße Kugel befindet?

   Hinweis: Wählen Sie als Wahrscheinlichkeitsraum $\{(0,0),(0,1),(1,0),(0,0)\}$. Dabei soll im Paar (ω_1, ω_2) die Zahl $\omega_1 = 0$ sein, falls die Kugel, die am Beginn in der Urne ist, weiß ist. Wenn $\omega_2 = 1$, so nehmen Sie die neu hinzugekommene Kugel heraus, wenn $\omega_2 = 0$, so nehmen Sie die Kugel heraus, die bereits in der Urne war. Die Zufallsvariabe X_1 beschreibe die Farbe der gezogenen Kugel, die Zufallsvariable X_2 beschreibe die Farbe der Kugel, die in der Urne zurückbleibt.

6. In einer Quizshow stehen hinter drei verschlossenen Türen ein Auto und zwei Ziegen. Der Kandidat zeigt auf eine Tür. Darauf öffnet der Quizmaster, der weiß, hinter welcher Tür das Auto ist, eine der anderen beiden Türen, und zwar so, dass hinter dieser Tür eine Ziege steht. Der Kandidat kann nun zwischen zwei Türen wählen. Die Tür, auf die er bei dieser zweiten Wahl zeigt, wird geöffnet, und er gewinnt, was hinter dieser Tür ist. Der Kandidat hat nun zwei Möglichkeiten: Er kann

   (a) bei seiner anfangs gewählten Tür bleiben.

   (b) auf die andere Tür zeigen.

   Berechnen Sie für jede dieser Optionen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kandidat das Auto gewinnt.

   Geben Sie dazu eine Zufallsvariable an, die von zwei Würfen mit einem dreiseitigen Würfel und einem Münzwurf abhängt, und deren Ergebnis 1 ist, falls der Kandidat das Auto gewinnt. Der erste Wurf gebe dabei an, wo das Auto steht, der zweite Wurf, auf welche Tür der Kandidat zuerst zeigt, und der Münzwurf, welche Tür der Quizmaster öffnet, falls er die Wahl hat.

Literatur

[1] D. J. C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, New York, 2003. The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.