Informations- und Codierungstheorie
12.Übungsblatt für den 20. Jänner 2009

Wir besprechen am 20.1. auch die Implikation (b)⇒(a) vom 11. Übungsblatt.

(1) Auf dem ersten Übungsblatt stand folgendes Beispiel:

> Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Komprimierungsprogramm nimmt Fehler in Kauf und komprimiert jede Datei mit m Bits auf eine Datei mit $\frac{2m}{3}$ Bits. Wieviele Bits werden, im Durchschnitt über alle Files der Länge m, durch Komprimieren und Dekomprimieren mindestens verändert? *Hinweis:* Das Komprimierungsprogramm erlaubt ihnen, den Kanal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Rate $R = \frac{3}{2}$ zu verwenden. Was können Sie über p_B aussagen?

(a) Wie können Sie $U, \overline{X}, \overline{Y}, V$ und den Kanal definieren, sodass Satz 4.30 aus dem Skriptum die untere Schranke für $p_B \approx 0.0614905$ liefert?

(b) Wie stark können Sie höchstens komprimieren, wenn Sie eine Bitfehlerrate von $\leq 20\%$ akzeptabel finden?

(2) Für ein Übertragungssystem, das Nachrichten von m Bits überträgt, sei p_B die Bitfehlerrate, und p_e die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Block von m Bits mindestens ein Fehler passiert. Zeigen Sie:

(a) $p_B \leq p_e$.

(b) $p_e \leq m \cdot p_B$.

Hinweis: Betrachten Sie die Zufallsvariable $X := \sum_{i=1}^{m} F_i$, die die Anzahl der Fehler bei der Übertragung misst.

(3) Wir zeigen in diesem Beispiel die Ungleichung von Fano ([Ash90, Theorem 3.7.1]).

Sei $s \geq 2$, und seien $X : \Omega \to \{1, 2, \ldots, s\}$ und $Y : \Omega \to \{1, 2, \ldots, s\}$ Zufallsvariablen. (Wir stellen uns vor, dass X und Y Eingabe und Ausgabe eines Kanals sind.) Sei $p_E := P[X \neq Y]$. Zeigen Sie

$$H(X|Y) \leq H(p_E, 1 - p_E) + p_E \cdot \log_2(s - 1).$$

(4) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1, 2\}$, $Y : \Omega \to \{1, 2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i, j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $|GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})|$.

(5) Sei K ein binärer Kanal mit Kanalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Seien $s = 2$, $n = 2$, $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$, $\overline{x}^{(1)} = 00$, $\overline{x}^{(2)} = 11$. Wir definieren $B_1 = \{00, 10\}$, $B_2 = \{11, 01\}$. Berechnen Sie die durchschnittliche Fehlerplausibilität für

$$\mathcal{C} = \big((\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}), (B_1, B_2)\big).$$

Literatur

[Ash90] R. B. Ash, *Information theory*, Dover Publications Inc., New York, 1990, Corrected reprint of the 1965 original.