Informations- und Codierungstheorie
11.Übungsblatt für den 13. Jänner 2009

(1) (Mathematica) Berechnen Sie den Transinformationsgehalt $T(A,(p_1,p_2))$ für folgende Kanalmatrizen, und zeichnen Sie die Ergebnisse (mit `Plot`).

(a) $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$

(2) Berechnen Sie die Kanalkapazität für die Kanäle, die durch folgende Matrizen gegeben sind:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) Berechnen Sie die Kanalkapazität für den Kanal, der durch folgende Matrix gegeben ist.

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Wir betrachten die Hintereinanderschaltung von Kanälen. Dazu schalten wir n binäre symmetrische Kanäle mit der Kanalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

mit $p < 1/2$ hintereinander. Diese Hintereinanderschaltung hat die Kanalmatrix A^n. Ihre Kanalkapazität bezeichnen wir mit $c(A^n)$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} c(A^n) = 0.$$

(5) Sei A eine Kanalmatrix. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind.

(a) Alle Zeilen von A sind gleich.

(b) Der Transinformationsgehalt $T(A,(p_1,\ldots,p_M)) = 0$ für alle $(p_1,\ldots,p_M) \in [0,1]^M$ mit $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$.