

Informations- und Codierungstheorie

10. Übungsblatt für den 16. Dezember 2008

1. Seien $X : \Omega \rightarrow \{1, 2\}$ und $Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$ Zufallsvariablen, sodass $P[X = 1] = P[X = 2] = \frac{1}{2}$. Sei $A(i, j) := P[Y = j | X = i]$. Berechnen Sie für folgende drei Matrizen jeweils $I(X; Y)$.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

2. Es seien $X : \Omega \rightarrow \{1, 2\}$, $Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$ und $Z : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$ Zufallsvariablen, sodass (X, Y, Z) eine Markovkette ist. Es sei $A(i, j) := P[Y = j | X = i]$, $B(i, j) := P[Z = j | Y = i]$, und $C(i, j) := P[Z = j | X = i]$.

Gegeben sind $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

die Matrix C .

3. Sei $p \in [0, \frac{1}{2}]$, und seien $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ und $Y : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ Zufallsvariablen mit der Eigenschaft, dass $P(\{\omega | X(\omega) = Y(\omega)\}) \geq 1 - p$. Zeigen Sie, dass $H(X|Y) \leq H(p, 1 - p)$. *Hinweis:* Eine Möglichkeit ist, eine dritte Zufallsvariable F zu definieren, sodass $F = 0$, wenn $X = Y$ und $F = 1$ sonst. Dann benutzen Sie die Kettenregel zweimal, um $H(X \otimes F|Y)$ auf zwei verschiedene Arten auszurechnen.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Wir nehmen an, dass $X = X_1 \otimes \cdots \otimes X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^n$ und $Y = Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^n$ folgende Eigenschaften erfüllen:

(a) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $P[X_i = Y_i] \geq 1 - p$.

(b) $H(X) = n$.

Zeigen Sie, dass $I(X; Y) \geq n \cdot (1 - H(p, 1 - p))$.