

Informations- und Codierungstheorie
1. Übungsblatt für den 14. Oktober 2008

1. (Kanalcodierung) Wir verwenden einen Übertragungskanal, der 0 und 1 überträgt, und bei dem mit Wahrscheinlichkeit 0.9 das ausgegebene Zeichen mit dem eingegebenen übereinstimmt, mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aber das falsche andere Zeichen ankommt.
 - (a) Begründen Sie, dass es durch wiederholtes Senden jedes Bits möglich ist, die Rate der falsch übertragenen Nachrichtenbits kleiner als 10^{-15} werden zu lassen.
 - (b) Wieviele Bits müssen Sie dabei über den Kanal senden, um 1 Nachrichtenbit zu übertragen?
2. Sie haben den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit 0.1 zur Verfügung. Sie verwenden diesen Kanal mit Rate R . (Sie verwenden also $m \cdot \frac{1}{R}$ Kanalbits, um m Nachrichtenbits zu übertragen.)
 - (a) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.52$ nicht unterschreiten?
 - (b) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.6$ nicht unterschreiten?
 - (c) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 1$ nicht unterschreiten?
 - (d) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 100$ nicht unterschreiten?
3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Komprimierungsprogramm nimmt Fehler in Kauf und komprimiert jede Datei mit m Bits auf eine Datei mit $\frac{2m}{3}$ Bits. Wieviele Bits werden, im Durchschnitt über alle Files der Länge m , durch Komprimieren und Dekomprimieren mindestens verändert? *Hinweis:* Das Komprimierungsprogramm erlaubt Ihnen, den fehlerfreien binären Kanal mit Rate $R = \frac{3}{2}$ zu verwenden. Was können Sie über die Bitfehlerrate b aussagen?
4. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$. Zeigen Sie

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r \\ i_1 < \dots < i_r}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}).$$

5. Sei $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $C(x) := 1 + x \log_2(x) + (1 - x) \log_2(1 - x)$ für $x \in (0, 1)$, $C(0) = C(1) = 1$. Skizzieren Sie C . Zeigen Sie, dass C stetig und konvex ist.