Informations- und Codierungstheorie
9.Übungsblatt für den 13. Dezember 2006

- (1) (Mathematica) Berechnen Sie den Transinformationsgehalt $T(A, (p_1, p_2))$ für folgende Kanalmatrizen, und zeichnen Sie die Ergebnisse (mit `Plot`).

(a) $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$

- (2) Berechnen Sie die Kanalkapazität für die Kanäle, die durch folgende Matrizen gegeben sind:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- (3) Berechnen Sie die Kanalkapazität für den Kanal, der durch folgende Matrix gegeben ist.

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (4) Wir betrachten die Hintereinanderschaltung von Kanälen. Dazu schalten wir n binäre symmetrische Kanäle mit der Kanalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

mit $p < 1/2$ hintereinander. Diese Hintereinanderschaltung hat die Kanalmatrix A^n . Ihre Kanalkapazität bezeichnen wir mit $c(A^n)$. Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(A^n) = 0.$$

- (5) Sei A eine stochastische $L \times M$ -Matrix, und B eine stochastische $M \times N$ -Matrix. Zeigen Sie, dass für alle $(p_1, \dots, p_L) \in [0, 1]^L$ mit $\sum_{i=1}^L p_i = 1$ gilt:

- (a) $T(A \cdot B, (p_1, \dots, p_L)) \leq T(A, (p_1, \dots, p_L))$.
- (b) Die Kapazität eines Kanals mit Kanalmatrix $A \cdot B$ ist höchstens so groß wie die Kapazität eines Kanals mit Matrix A .
- (c) Die Kapazität eines Kanals mit Kanalmatrix $A \cdot B$ ist höchstens so groß wie die Kapazität eines Kanals mit Matrix B .

Hinweis: Definieren Sie geeignete Zufallsvariablen X, Y, Z und bringen Sie $I(X; Y)$, $I(X; Z)$ und $I(Y; Z)$ mit den gesuchten Transinformationsraten in Zusammenhang.

- (6) Sei A eine Kanalmatrix. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind.
- (a) Alle Zeilen von A sind gleich.
 - (b) Der Transinformationsgehalt $T(A, (p_1, \dots, p_M)) = 0$ für alle $(p_1, \dots, p_M) \in [0, 1]^M$ mit $\sum_{i=1}^M p_i = 1$.