Informations- und Codierungstheorie
8.Übungsblatt für den 6. Dezember 2006

(1) (cf. [Mac03, Exercise 8.6]) Die Zufallsvariablen X und Y haben folgende gemeinsame Verteilung:

$P[X=x, Y=y]$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$y=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$y=3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$y=4$	$\frac{1}{4}$	0	0	0

(a) Berechnen Sie $H(X \otimes Y)$, $H(X)$, $H(Y)$.
(b) Berechnen Sie für jedes $y \in \{1,2,3,4\}$ die Entropie von $X|_{Y=y}$.
(c) Berechnen Sie $H(X|Y)$ und $I(X;Y)$.

(2) (a) (cf.[Mac03, Exercise 8.1]) Consider three independent random variables U, V, W with entropies $H(U)$, $H(V)$, $H(W)$. Let $X := U \otimes V$, $Y := V \otimes W$. What is $H(X \otimes Y)$? What is $H(X|Y)$? What is $I(X;Y)$?
(b) (cf. [Mac03, Exercise 8.2]) Confirm that it is possible for $H(X|_{Y=b_k})$ to exceed $H(X)$.

(3) [Ash90, Beispiel 1.2] A single unbiased die is tossed once. If the face of the die is 1,2,3, or 4, an unbiased coin is tossed once. If the face of the die is 5 or 6, the coin is tossed twice. Find the information conveyed about the face of the die by the number of heads obtained.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dieses Experiment zu beschreiben, ist, als Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$

mit $P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = \frac{1}{24}$ für alle $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ zu wählen. Die Zufallsvariable Y soll die Anzahl der Köpfe angeben.

(4) Sei (X, Y, Z) eine Markovkette, also $P[Z = z \,|\, Y = y, X = x] = P[Z = z \,|\, Y = y]$ für alle x, y, z mit $P[X = x, Y = y, Z = z] > 0$. Zeigen Sie, dass auch (Z, Y, X) eine Markovkette ist.

(5) Seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2,3\}$, und $Z : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen, und seien die Matrizen A und B gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass $P[Y = j \,|\, X = i] := A(i,j)$ und $P[Z = j \,|\, Y = i] = B(i,j)$. Ausserdem nehmen wir an, dass (X,Y,Z) eine Markovkette ist. Berechnen Sie die Matrix C, die durch $C(i,j) := P[Z = j \,|\, X = i]$ gegeben ist.

(6) Seien $X_1 : \Omega \to A_1$, $X_2 : \Omega \to A_2$, $Y_1 : \Omega \to B_1$, $Y_2 : \Omega \to B_2$ Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass für alle $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ und $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ mit $P[X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & P[Y_1 \otimes Y_2 = (b_1, b_2) \,|\, X_1 \otimes X_2 = (a_1, a_2)] \\ & \qquad = P[Y_1 = b_1 \,|\, X_1 = a_1] \cdot P[Y_2 = b_2 \,|\, X_2 = a_2]. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass $I(X_1 \otimes X_2; Y_1 \otimes Y_2) \leq I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)$ nicht gelten muss, wenn (1) nicht erfüllt ist.

Literatur

[Ash90] R. B. Ash, *Information theory*, Dover Publications Inc., New York, 1990, Corrected reprint of the 1965 original.

[Mac03] D. J. C. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*, Cambridge University Press, New York, 2003, The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.