

Informations- und Codierungstheorie
7. Übungsblatt für den 29. November 2006

- (1) Bei 2-maligem Würfeln gebe X die Augenzahl beim ersten Wurf, Y die Augenzahl beim zweiten Wurf, und Z die Summe der Augenzahlen beider Würfe an.

- (a) Berechnen Sie $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$.
 (b) Wir nehmen an, wir wissen bereits, dass der zweite Wurf 4 ergeben hat. Die Zufallsvariablen X' und Z' sollen den Ausgang von X und Z unter dieser Annahme beschreiben. Es gilt also

$$P[X' = x_i] := \frac{P[X = x_i \& Y = 4]}{P[Y = 4]}$$

und

$$P[Z' = z_i] := \frac{P[Z = z_i \& Y = 4]}{P[Y = 4]}.$$

Berechnen Sie $H(X')$ und $H(Z')$.

- (2) Wir würfeln einmal. Seien X, Y, Z Zufallsvariablen, die so definiert sind:
- $X = 0$ genau dann, wenn die Augenzahl gerade ist, $X = 1$ sonst.
 - $Y = 0$ genau dann, wenn die Augenzahl höchstens 3 ist, $Y = 1$ sonst.
 - Z sei die Augenzahl des Wurfes.
- (a) Berechnen Sie $H(Z|X \otimes Y)$ und $H(X \otimes Y|Z)$.
 (b) Wieviel erspart das Wissen über $X \otimes Y$ für die Übertragung von Z ?
 Wie groß ist also $H(Z) - H(Z|X \otimes Y)$?
 (c) Wieviel erspart das Wissen über Z für die Übertragung von $X \otimes Y$?
 Wie groß ist also $H(X \otimes Y) - H(X \otimes Y|Z)$?
 (d) Berechnen Sie $H(X) - H(X|Y)$!
- (3) (Teile dieses Beispiels sind [Ash90, Beispiel 1.4 (b)]) Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \rightarrow M$, $Y : \Omega \rightarrow N$, $Z : \Omega \rightarrow R$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

- (a)

$$H(Y \otimes Z|X) = H(Y|X) + H(Z|X \otimes Y).$$

- (b)

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

- (4) In der Vorlesung haben wir $H(Y|X)$, also die nach Bekanntgabe von X verbleibende Unsicherheit über Y , definiert durch

$$H(Y|X) := H(X \otimes Y) - H(X).$$

Wir nehmen an, dass X die Werte $x_1, \dots, x_M$ annimmt, und dass Y die Werte $y_1, \dots, y_L$ annimmt. Wir nehmen an, dass für alle i gilt: $P[X = x_i] > 0$. Sei Y_i die Zufallsvariable, die den Wert y_j mit Wahrscheinlichkeit $P[Y = y_j | X = x_i]$ annimmt. Es gilt also

$$P[Y_i = y_j] = P[Y = y_j | X = x_i].$$

Y_i gibt also das Verhalten von Y an, wenn wir schon wissen, dass $X = x_i$ ist.

Zeigen Sie:

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^M P[X = x_i] \cdot H(Y_i).$$

$H(Y|X)$ ist also das gewichtete Mittel der $H(Y_i)$.

- (5) In diesem Beispiel arbeiten wir an einer Interpretation für $H(X|Y)$. Dazu gehen wir von folgendem Experiment aus: Seien $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_M\}$ und $Y : \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_L\}$ Zufallsvariablen. Wir wollen die Ausgänge von X einem Empfänger übertragen, dem die Ausgänge von Y bereits bekannt sind.

(Das kann man sich so vorstellen: wir wollen dem Empfänger mitteilen, ob das Rouletterad auf “gerade” oder “ungerade” gefallen ist, wissen aber, dass der Empfänger bereits weiß, ob das Rad auf “rot” oder “grün” gefallen ist).

Wie übermitteln Sie dem Empfänger die Ausgänge von X so, dass Sie durchschnittlich nur höchstens $H(X|Y) + 1$ Zeichen pro Ausgang von X und Y brauchen?

- (6) (Bonusbeispiel) Zeigen Sie folgende Abschätzung für die Binomialkoeffizienten: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k} \leq 2^{n H(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n})}.$$

Hinweis: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq 1.$

LITERATUR

- [Ash90] R. B. Ash, *Information theory*, Dover Publications Inc., New York, 1990, Corrected reprint of the 1965 original.