Informations- und Codierungstheorie
6.Übungsblatt für den 22. November 2006

(1) Konstruieren Sie – etwa mit dem Verfahren von Huffman – optimale binäre Codes für folgende Wahrscheinlichkeiten, und berechnen Sie die durchschnittliche Codewortlänge.
 (a) [Ash90] $(0.3, 0.25, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05)$
 (b) $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.
 (c) [Ash90] $(.2, .18, .1, .1, .1, .061, .059, .04, .04, .04, .04, .03, .01)$.

(2) (a) [Ash90] Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ für die Wahrscheinlichkeiten

$$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02).$$

 (b) Konstruieren Sie einen optimalen Code über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ für die Wahrscheinlichkeiten

$$(0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.08, 0.05, 0.02).$$

(3) [Ash90] Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Codewortlänge $\overline{n}$ eines optimalen binären Codes für die Ausgänge von X immer $\overline{n} \leq H(X) + 1$ erfüllt.

(4) Sei $X : \Omega \to A$ eine Zufallsvariable, $n \in \mathbb{N}$, und sei $C : A^n \to \{0, 1\}^+$ eine injektive Funktion. C muss aber nicht notwendigerweise eine eindeutig decodierbare Codierung von A^n sein. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n} E\left(L \circ C \circ X^{[n]}\right) \geq H(X) - \frac{2}{n} \cdot \log_2(8\, n\, \log_2(|A|)).$$

(5) Seien $X : \Omega \to A$, $Y : \Omega \to B$ Zufallsvariablen. Wir definieren eine Zufallsvariable Z durch

$$Z(\omega) = -\log_2(P[X = X(\omega) \,|\, Y = Y(\omega)]),$$

falls $P[X = X(\omega) \text{ und } Y = Y(\omega)] > 0$, $Z(\omega) = 0$ sonst. Zeigen Sie $E(Z) = H(X \otimes Y) - H(Y)$. Wann gilt $H(X \otimes Y) = H(Y)$?

Literatur

[Ash90] R. B. Ash, *Information theory*, Dover Publications Inc., New York, 1990, Corrected reprint of the 1965 original.