Informations- und Codierungstheorie
5.Übungsblatt für den 15. November 2006

Wir besprechen am 15.11. auch das Beispiel 5 des 4. Übungsblatts.

1. Sei $\mathbf{C}$ ein präfixfreier Code über einem D-elementigen Alphabet mit den Codewörtern $(C_1, \ldots, C_M)$ der Längen $n_1 \leq \cdots \leq n_M$. Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind.

   (a) Jedes Wort der Länge n_M ist entweder ein Codewort oder hat ein Codewort als Präfix.

   (b) $\sum_{k=1}^{M} D^{-n_k} = 1$.

2. Sei $K < M$, und sei $(C_1, \ldots, C_K)$ ein präfixfreier Code mit K Codewörtern über einem D-elementigen Alphabet. Finden Sie eine Bedingung, die charakterisiert, ob sich $(C_1, \ldots, C_K)$ zu einem präfixfreien Code $(C_1, \ldots, C_K, C_{K+1}, \ldots, C_M)$ mit M Codewörtern erweitern lässt. *Hinweis:* $(0, 10, 110, 111)$ lässt sich zum Beispiel nicht präfixfrei auf 6 Codewörter erweitern, $(00, 10, 110, 111)$ hingegen schon.

3. Sei $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_M \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$, und sei $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_M)$ ein optimaler Code für diese Wahrscheinlichkeiten. Zeigen Sie, dass für alle i, j mit $p_i > p_j$ die Ungleichung $|C_i| \leq |C_j|$ gelten muss. Dabei ist $|C_i|$ die Länge des Codewortes C_i.

4. Sei $D \geq 2$, $M \in \mathbb{N}$, und seien $n_1, \ldots, n_M \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{D^{n_i}} = 1$. Zeigen Sie, dass $M \equiv 1 \pmod{D-1}$.

5. Sei $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_M)$ ein binärer präfixfreier Code mit $\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{\mathsf{L}(C_i)}} = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}$ optimal für die Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_M)$ mit $p_i := 2^{-\mathsf{L}(C_i)}$ ist.