Informations- und Codierungstheorie
4.Übungsblatt für den 8. November 2006

1. (a) [2] Zeigen Sie, dass der Code $\{0, 10, 011, 11111\}$ eindeutig decodierbar ist.

   (b) [1] Ist der Code $\{a, c, ad, abb, bad, deb, bbcde\}$ eindeutig decodierbar?

2. Der "übliche" Binärcode für die natürlichen Zahlen ($C(13)$ ist z.B. 1101) ist kein präfixfreier Code. Daher kann man Zahlenfolgen auch nicht mit diesem Code übertragen (11011 könnte etwa $(13, 1)$ oder $(6, 3)$ bedeuten).

   (a) Finden Sie einen präfixfreien Code für alle natürlichen Zahlen auf dem Alphabet $\{0, 1\}$.

   (b) Finden Sie eine präfixfreie Codierung C für alle natürlichen Zahlen auf $\{0, 1\}$, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{L}(C(n))}{n} = 0$. Dabei ist $\mathsf{L}(C(n))$ die Länge des Codewortes von n.

   (c) Zeigen Sie, dass die mittlere Länge der Codierungen der ersten n Zahlen stets größer oder gleich $\log_2(n)$ ist. Zeigen Sie also

   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{L}(C(i)) \geq \log_2(n).$$

3. Die Zufallsvariable X nimmt die Werte x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten $0.99, 0.005, 0.005$ an. Wir wollen die Ausgänge der Zufallsvariablen X durch $0, 1$-Folgen übertragen.

   (a) In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass wir das mit einem Code machen können, dessen durchschnittliche Codewortlänge im Intervall $[H(X), H(X) + 1]$ liegt. Finden Sie einen solchen Code!

   (b) Wir fassen jetzt immer zwei Ausgänge von X zusammen und übertragen diese Ausgänge gemeinsam. Wir übertragen also jetzt die Ausgänge der Zufallsvariablen

   $$\begin{array}{rccc} Y & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \{x_1, x_2, x_3\} \times \{x_1, x_2, x_3\} \\ & & (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & (X(\omega_1), X(\omega_2)). \end{array}$$

   Berechnen Sie $H(Y)$, und finden Sie eine Codierung für Y, deren durchschnittliche Codewortlänge im Intervall $[H(Y), H(Y) + 1]$ liegt. Wieviele Zeichen brauchen Sie jetzt im Durchschnitt für einen Ausgang von X?

4. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_M\}$ eine Zufallsvariable. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $Y : \Omega^n \to \{x_1, \ldots, x_M\}^n$,

   $$Y((\omega_1, \ldots, \omega_n)) := (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_n)).$$

   Sei $\mathcal{C}$ ein eindeutig decodierbarer binärer Code für Y. Zeigen Sie, dass die durchschnittliche Codewortlänge von $\mathcal{C}$ zumindest $n \cdot H(X)$ sein muss.

5. [3] Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ auf Zahl fällt, N mal. Sei $\beta > 0$, und sei z die Anzahl der Würfe auf Zahl. Wir nennen diese Folge von N Würfen *typisch zum Parameter* β, wenn

$$|\frac{1}{N} \cdot \left(-\log_2 \left(p^z \cdot (1-p)^{N-z}\right)\right) - H(p, 1-p)| \leq \beta.$$

   Sei $q(N, \beta)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Folge von N Münzwürfen mit Zahlwahrscheinlichkeit p typisch zum Parameter β ist. Zeigen Sie:

   (a) $\lim_{N \to \infty} q(N, \beta) = 1$.

   (b) Es gibt höchstens $2^{N \cdot (H(p,1-p)+\beta)}$ typische Folgen der Länge N.

Literatur

[1] R. B. Ash. *Information theory.* Dover Publications Inc., New York, 1990. Corrected reprint of the 1965 original.

[2] W. Heise and P. Quattrocchi. *Informations- und Codierungstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.

[3] D. J. C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms.* Cambridge University Press, New York, 2003. The book can be viewed at `http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html`.