

Informations- und Codierungstheorie
2. Übungsblatt für den 18. Oktober 2006

1. Sie werfen drei Mal eine faire 5 Schilling-Münze, und notieren die Anzahl von “Zahl” und “Lippizaner”. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl von “Zahl”. Bestimmen Sie die Varianz von X . Geben Sie dazu einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) an, der für dieses Problem geeignet ist, und beschreiben Sie die Funktion X .
2. Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, und sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Ist die Voraussetzung $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ notwendig?

3. Wie groß ist bei zweimaligem Würfeln die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme größer als 7 ist, wenn wir schon wissen, dass das Produkt der Augenzahlen größer als 8 ist?
4. Wir würfeln zweimal und werfen eine Münze einmal. Fällt die Münze auf “Zahl”, zählen wir beide Augenzahlen der Würfel zusammen, fällt die Münze auf “Kopf”, so zählen wir nur die höhere Augenzahl der beiden Würfe. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariable an, die dieses Experiment beschreiben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf “Kopf” gefallen ist, wenn wir schon wissen, dass das Ergebnis des Experiments die Zahl 6 ist?
5. ([1, Exercise 3.12]) Eine Urne enthält genau eine Kugel, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder weiß oder schwarz ist. Eine weiße Kugel wird in die Urne dazugelegt, die Urne geschüttelt, und eine Kugel wird herausgenommen. Die herausgenommene Kugel ist weiß. (Die Urne ist also wieder im gleichen Zustand wie zuvor.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jetzt in der Urne eine weiße Kugel befindet?

Hinweis: Wählen Sie als Wahrscheinlichkeitsraum $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$. Dabei soll im Paar (ω_1, ω_2) die Zahl $\omega_1 = 0$ sein, falls die Kugel, die am Beginn in der Urne ist, weiß ist. Wenn $\omega_2 = 1$, so nehmen Sie die neu hinzugekommene Kugel heraus, wenn $\omega_2 = 0$, so nehmen Sie die Kugel heraus, die bereits in der Urne war. Die Zufallsvariable X_1 beschreibe die Farbe der Kugel, die am Beginn in der Urne ist, die Zufallsvariable X_2 beschreibe die Farbe der Kugel, die Sie ziehen.

6. ([1, Exercise 3.14]) In einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Fällt eine der Münzen auf Kopf, so haben Sie einen Preis gewonnen. Um den Preis zu erhalten, müssen Sie auf eine der Münzen zeigen, die auf Kopf fällt.

Sie sehen Fritz bei diesem Spiel zu. Er wirft zwei Münzen, zeigt auf eine und sagt wahrheitsgemäß: “Diese Münze ist auf Kopf gefallen, ich habe gewonnen.” Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Münze auf Kopf gefallen ist?

Hinweis: Es geht wieder um die Wahl eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums und geeigneter Zufallsvariablen.

Literatur

- [1] D. J. C. MacKay. *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, New York, 2003. The book can be viewed at <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itprnn/book.html>.