

Informations- und Codierungstheorie
13. Übungsblatt für den 31. Jänner 2007

In der letzten Übung haben wir aus den Sätzen von Shannon Resultate für das *diskrete Kugelpackungsproblem* hergeleitet. Wir haben gezeigt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(A(n, 2np + 1))}{n} \leq 1 - H(p).$$

- (1) Folgern Sie aus dieser Ungleichung dass für alle $\delta \in [0, 1]$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(A(n, n\delta))}{n} \leq 1 - H\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

- (2) Sei $\varepsilon > 0$, sei $p \in]0, 1[$, und sei $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$: $r(n) \leq n(p - \varepsilon)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=r(n)}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1.$$

- (3) Seien $s, n, e \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{C}$ ein (s, n) Code mit Minimaldistanz $\geq 2e + 1$. Zeigen Sie:

$$s \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^e \binom{n}{i}}.$$

(Diese Schranke heißt *Hamming-Schranke*.)

- (4) (a) Welche Länge muss ein binärer Code mit 64 Codewörtern und Minimaldistanz 6 aufgrund der Hamming-Schranke mindestens haben?
 (b) Welche Minimaldistanz kann ein binärer linearer Code mit 2^9 Codewörtern der Länge 13 aufgrund der Hamming-Schranke maximal haben?
- (5) (Mathematica) Wir wählen s Codewörter aus $\{0, 1\}^n$. Für jedes Codewort $\mathbf{x}$ sei $w(\mathbf{x})$ die Anzahl der 1 dieses Codeworts.
 (a) Finden Sie eine Funktion $f(s, n, a)$, die angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass

$$\min \{w(\mathbf{x}^{(i)}) \mid i \in \{1, \dots, s\}\}$$

für s zufällig (und gleichverteilt) aus $\{0, 1\}^n$ gewählte Wörter gleich a ist. (Zum Testen: `f[5, 6, 1] = 0.363909`).

- (b) Finden Sie den Erwartungswert von

$$\min \{w(\mathbf{x}^{(i)}) \mid i \in \{1, \dots, s\}\}.$$

(Zum Testen: `Erw[3, 5] = 1.57715`).