Informations- und Codierungstheorie
12.Übungsblatt für den 24. Jänner 2007

Aus den Sätze von Shannon kann man auch Resultate für das *diskrete Kugelpackungsproblem* herleiten.

Seien dazu $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$. Die *Hamming-Distanz* von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ x_i \neq y_i\}|,$$

also als die Anzahl der Stellen, an denen sich $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ unterscheiden.

Für einen Code $\mathcal{C} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}) \in (\{0,1\}^n)^s$ ist die Minimaldistanz von $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$d_{\min}(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \,|\, i \neq j\}.$$

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $p \in [0,1]$, und sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen an, dass wir einen Code $\mathcal{C} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}) \in (\{0,1\}^n)^s$ mit Minimaldistanz $d_{\min}(\mathcal{C}) \geq 2np + 1$ haben. Bauen Sie aus diesen s Codewörtern ein Übertragungssystem für Nachrichten mit $\lfloor \log_2(s) \rfloor$ Bits und n-maliger Verwendung des Kanals $\begin{pmatrix} 1-(p-\varepsilon) & (p-\varepsilon) \\ (p-\varepsilon) & 1-(p-\varepsilon) \end{pmatrix}$, sodass die Bitfehlerrate $p_B(n)$ die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} p_B(n) = 0$ erfüllt. *Hinweis: Für große n ist es sehr unwahrscheinlich, dass np Bits bei der Übertragung umfallen.*

(2) Sei $A(n,d)$ das maximale $s \in \mathbb{N}_0$, sodass es einen binären Code der Länge n mit Minimaldistanz $\leq d$ gibt. (Bsp.: $(A(n,0) = \infty$, $A(n,1) = 2^n$, $A(n,n) = 2)$. Zeigen Sie

(1) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np+1))}{n} \leq 1 - H(p).$$

Hinweis: Es reicht, dass für alle ε gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, 2np+1))}{n} \leq 1 - H(p-\varepsilon).$$

(3) Folgern Sie aus der Ungleichung (1), dass für alle $\delta \in [0,1]$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(A(n, n\delta))}{n} \leq 1 - H(\frac{\delta}{2}).$$

(4) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1,2\}$, $Y : \Omega \to \{1,2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i,j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, $p \in [0,1]$. Berechnen Sie $V(\mathrm{LogP}(Y))$ und $V(\mathrm{LogP}(X \otimes Y))$.