Informations- und Codierungstheorie
11.Übungsblatt für den 16. Jänner 2007

(1) In der Vorlesung haben wir die gemeinsam typischen Ausgangsfolgen von Zufallsvariablen X und Y definiert:

> Seien $X : \Omega \to A$ und $Y : \Omega \to B$ Zufallsvariablen, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\beta > 0$. Wir nennen ein $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T \in (A \times B)^n$ eine *gemeinsam typische Ausgangsfolge von $X \otimes Y$ der Länge n zum Parameter* β, wenn folgende Eigenschaften gelten:
> (a) Die Folge $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T$ ist eine typische Ausgangsfolge von $X \otimes Y$ der Länge n zum Parameter β.
> (b) Die Folge $\mathbf{a}$ ist eine typische Ausgangsfolge von X der Länge n zum Parameter β.
> (c) Die Folge $\mathbf{b}$ ist eine typische Ausgangsfolge von Y der Länge n zum Parameter β.
>
> $GT(X, Y, n, \beta)$ ist die Menge der gemeinsam typischen Ausgangsfolgen von $X \otimes Y$.

Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1, 2\}$, $Y : \Omega \to \{1, 2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i, j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $|GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})|$.

(2) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1, 2\}$, $Y : \Omega \to \{1, 2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i, j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $P[(X \otimes Y)^{[10]} \in GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})]$.

(3) Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $X : \Omega \to \{1, 2\}$, $Y : \Omega \to \{1, 2\}$ Zufallsvariablen mit

$$P[X = i \,\&\, Y = j] = \frac{1}{2} A(i, j),$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Seien $X^{[10]}_{\text{allein}}$ und $Y^{[10]}_{\text{allein}}$ Zufallsvariablen, die auf $\Omega^{10} \times \Omega^{10}$ durch

$$\begin{aligned} X^{[10]}_{\text{allein}}(\omega_1, \omega_2) &= X^{[10]}(\omega_1) \\ Y^{[10]}_{\text{allein}}(\omega_1, \omega_2) &= Y^{[10]}(\omega_2) \end{aligned}$$

für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^{10}$ definiert sind. Berechnen Sie

$$P[(X^{[10]}_{\text{allein}} \otimes Y^{[10]}_{\text{allein}})^T \in GT(X, Y, 10, \frac{1}{4})].$$

(4) Sei A die Kanalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Seien $s = 2$, $n = 2$, $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$, $\overline{x}^{(1)} = 00$, $\overline{x}^{(2)} = 11$. Wir definieren $B_1 = \{00, 10\}$, $B_2 = \{11, 01\}$. Berechnen Sie die durchschnittliche Fehlerplausibilität für

$$\mathcal{C} = \big((\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}), (B_1, B_2)\big).$$