

Informations- und Codierungstheorie
10. Übungsblatt für den 9. Jänner 2007

Wir besprechen am 9.1. auch den Beweis der Implikation (b) \Rightarrow (a) des Beispiels (6) vom 9. Übungsblatt.

- (1) Wir zeigen in diesem Beispiel die Ungleichung von Fano ([Ash90, Theorem 3.7.1]).

Sei $s \geq 2$, und seien $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$ und $Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$ Zufallsvariablen. (Wir stellen uns vor, dass X und Y Eingabe und Ausgabe eines Kanals sind.) Sei $p_E := P[X \neq Y]$. Zeigen Sie

$$H(X|Y) \leq H(p_E, 1 - p_E) + p_E \cdot \log_2(s - 1).$$

- (2) Sie haben den binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit 0.1 zur Verfügung, also den Kanal mit Kanalmatrix $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$. Sie verwenden diesen Kanal mit Rate R . (Sie verwenden also $m \cdot \frac{1}{R}$ Kanalbits, um m Nachrichtenbits zu übertragen.)
- (a) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.52$ nicht unterschreiten?
 - (b) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 0.6$ nicht unterschreiten?
 - (c) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 1$ nicht unterschreiten?
 - (d) Welche Bitfehlerrate können Sie für $R = 100$ nicht unterschreiten?
- (3) Sei $m \in \mathbb{N}$. Ein Komprimierungsprogramm nimmt Fehler in Kauf und komprimiert jede Datei mit m Bits auf eine Datei mit $\frac{2m}{3}$ Bits. Wieviele Bits werden, im Durchschnitt über alle Files der Länge m , durch Komprimieren und Dekomprimieren mindestens verändert? *Hinweis:* Das Komprimierungsprogramm erlaubt ihnen, den Kanal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Rate $R = \frac{3}{2}$ zu verwenden. Was können Sie über p_B aussagen?
- (4) Für ein Übertragungssystem, das Nachrichten von m Bits überträgt, sei p_B die Bitfehlerrate, und p_e die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Block von m Bits mindestens ein Fehler passiert. Zeigen Sie:
- (a) $p_B \leq p_e$.
 - (b) $p_e \leq m \cdot p_B$.
- Hinweis:* Betrachten Sie die Zufallsvariable $X := \sum_{i=1}^m F_i$, die die Anzahl der Fehler bei der Übertragung misst.

LITERATUR

[Ash90] R. B. Ash, *Information theory*, Dover Publications Inc., New York, 1990, Corrected reprint of the 1965 original.