

Mathematik 3 für CMS
9. Übungsblatt für den 7. Dezember 2006

33. Sei \mathbf{K} ein Körper und sei $p \in \mathbf{K}[x]$ ein Polynom vom Grad zwei oder drei. Zeige: p ist irreduzibel über \mathbf{K} genau dann, wenn \bar{p} keine Nullstellen in \mathbf{K} hat.
34. Zeige: Das Polynom $x^3 + x + 1$ ist irreduzibel über \mathbb{Z}_2 und über \mathbb{Z}_5 , aber nicht irreduzibel (d.h. reduzibel) über \mathbb{Z}_3 und über \mathbb{Z}_{11} .
35. Zeige, dass $\mathbb{Z}_2[x]/f$ ein Körper ist, wobei $f = x^3 + x + 1$. Berechne

$$([x^2 + x]_f \cdot [x + 1]_f^{-1} + [x^2 + 1]_f^2)^{-1}$$

und stelle das Ergebnis in reduzierter Form dar.

36. Gib explizit einen Körper \mathbf{F} der Ordnung 243 an. (*Hinweis:* Finde einen Körper \mathbf{K} und ein Polynom $f \in \mathbf{K}[x]$, sodass $\mathbf{F} := \mathbf{K}[x]/f$ ein Körper mit 243 Elementen ist).