

Mathematik 1 für CMS und MC
5. Übungsblatt für den 3. und 6. November 2006

16. Finde umgangssprachliche Formulierungen für folgende Formeln der Prädikatenlogik ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$):

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$.
- (b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y \leq 0 \implies x < y$.
- (c) $\forall A \subseteq \mathbb{N} : ((1 \in A \wedge \forall a \in A : a + 1 \in A) \implies A = \mathbb{N})$.
- (d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta \implies |\sin(y) - \sin(x)| < \varepsilon$.

Welche der Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

17. (*) Wir betrachten die beiden Formeln der Prädikatenlogik

$$\varphi := \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} : P(x, y), \quad \psi := \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : P(x, y).$$

Finde jeweils eine Definition von P (falls möglich) sodass

- (a) φ und ψ wahre Aussagen sind,
 - (b) φ eine wahre und ψ eine falsche Aussage ist,
 - (c) φ eine falsche und ψ eine wahre Aussage ist,
 - (d) φ und ψ falsche Aussagen sind.
18. Sei $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{a, b, c, d, e\}$. Wir definieren die Relationen

- $R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c), (4, b), (4, c)\} \subseteq M_1 \times M_2$,
- $R_2 = \{(a, 5), (b, 3), (b, 4), (c, 2)\} \subseteq M_2 \times M_1$,
- $R_3 = \{(1, 3), (3, 5), (5, 1)\} \subseteq M_1 \times M_1$.

Berechne $R_1 \circ R_2$ und $R_2 \circ R_1$. Gilt $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$?

19. Finde zwei Relationen R und S auf $\{1, 2, 3\}$, sodass $R \circ S \neq S \circ R$.

20. (*) Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$. Wieviele (binäre) Relationen gibt es zwischen A und B ? Wieviele Relationen gibt es auf A (d.h. zwischen A und A)?