

Mathematik 3 für CMS, FHS Hagenberg
4. Übungsblatt für den 25.10.2005

Verwenden Sie für dieses Übungsblatt Mathematica bitte nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse.

1. Bestimmen Sie im Ring \mathbb{Z}_{15} :

(a) $[2]_{15} - [13]_{15}$ (b) $-[6]_{15} - [10]_{15}$ (c) $[7]_{15} \cdot [11]_{15}$
(d) $([7]_{15})^2$ (e) $([7]_{15})^4$ (f) $([7]_{15})^8$ (g) $([7]_{15})^{13}$

2. Lösen Sie in \mathbb{Z}_{18} :

(a) $[5]_{18} - x = [7]_{18}$
(b) $[15]_{18} * x = [1]_{18}$
(c) $[15]_{18} * x = [9]_{18}$

3. Lösen Sie die Gleichungssysteme über \mathbb{Z}_7 mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (Achtung: Wir schreiben hier für die Restklasse $[x]_7$ kurz x).

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Für $a \in \mathbb{Z}_n$ heißt die kleinste positive ganze Zahl k , sodass $a^k = [1]_n$ gilt, die *multiplikative Ordnung* von a . Bestimmen Sie die Ordnungen folgender Elemente:

(a) $[2]_5$ (b) $[6]_{15}$ (c) $[1]_{15}$ (d) $[7]_{15}$

Was fällt Ihnen im Zusammenhang mit dem Satz von Euler auf?

5. Sei p eine Primzahl, und sei a in \mathbb{Z}_p so, dass

$$\{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}.$$

Dann heißt a ein *Generator* von $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$.

(Beispielsweise ist $[2]_5$ ein Generator von $\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}$, aber $[4]_5$ nicht.)

Geben Sie alle Generatoren für \mathbb{Z}_7 und für \mathbb{Z}_{17} an.