Mathematik 3 für CMS, FHS Hagenberg
10. Übungsblatt für den 13.12.2005

1. Sei K ein Körper mit Characteristik p (Primzahl), sei $m \in \mathbb{N}$, und seien $x, y \in K$. Zeigen Sie
$$(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m}.$$

2. Berechnen Sie:
   (a) 3^{24} in $\mathbb{Z}_{11}$
   (b) 5^{-23} in $\mathbb{Z}_{13}$
   (c) $([2x+1]_{x^2+1})^3$ in $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$

3. Sei $f = x^3 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Berechnen Sie im Körper $\mathbb{Z}_7[x]/f$:
   (a) $([4x^2 + 2x + 6]_f)^{344}$
   (b) $([2x^2 + 3x + 5]_f)^{7^4}$
   (c) $([3x + 5]_f)^{-49}$

4. Geben Sie ein Element a im Körper $K := \mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + 2x + 1)$ an, welches die Gleichung $a^3 + 2a + 1 = 0$ erfüllt.

   D.h., $a \in K$ ist eine Nullstelle des Polynoms $y^3 + 2y + 1 \in K[y]$. Ist a^5 auch eine Nullstelle dieses Polynoms?

5. Sei K ein Körper. Für $a \in K, a \neq 0$, heißt die kleinste positive ganze Zahl m, sodass $a^m = 1$ gilt, die *multiplikative Ordnung* von a. Bestimmen Sie die Ordnungen folgender Elemente:
   (a) $[2]_{x^3+3x+2}$ in $\mathbb{Z}_7[x]/(x^3 + 3x + 2)$
   (b) $[x]_{x^2+1}$ in $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$
   (c) $[x+1]_{x^2+1}$ in $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$