

MAT1 für CMS und MC
FHS Hagenberg
12. Übungsblatt für den 10. Jänner 2006

Vektorräume und Basen sind wahrscheinlich die wichtigsten Inhalte, die Sie in Mathematik 1 kennenlernen sollen. Wir werden in der letzten Übung am 10. bzw. 12. Jänner auf jeden Fall die Aufgaben 11.4, 12.1, 12.2, 12.3 besprechen. Jeder sollte diese 4 Beispiele vorbereiten.

- (1) Ist B eine Basis des Vektorraums V ?

Hinweis: Überprüfen Sie, ob die Vektoren in B linear unabhängig sind, indem Sie ein Gleichungssystem lösen.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

- (2) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums V und die Dimension von V .
 Hinweis: Lösen Sie dazu die linearen Gleichungssysteme.

(a) $V = \mathbb{R}^2$

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\}$

(c) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \right\}$

- (3) Gegeben sei ein Unterraum V von \mathbb{R}^3 mit der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Lassen sich die folgenden Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren darstellen? Wenn ja, auf wieviele Arten?

$$a = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, z.B.,

$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$