UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

9. Übungszettel, 28. Mai 2013

1. Zerlegen Sie $x^5+2x^4+4x^3+x+4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ in quadratfreie Faktoren (mittels Ableitung und ggT).

2. Zerlegen Sie $x^4 + 2x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ in irreduzible Faktoren (mittels Berlekamp-Algorithmus).

3. (a) Bestimmen Sie den Exponent von $f = x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Ist f maximalperiodisch?
   (b) Finden Sie ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}_7[x]$, dessen Grad größer als 5000 ist.

4. Sei $g = x^3 + x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.
   (a) Welche Vielfachheit hat 2 als Nullstelle von g? Hat g weitere Nullstellen? Wenn ja, mit welcher Vielfachheit?
   (b) Geben Sie ein Polynom $h \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit $h \neq g$ an, sodass $\bar{h} = \bar{g}$.

5. (a) Die formalen Potenzreihen $(\mathbb{Z}_p[[x]]\backslash\{\mathbf{o}\}, \cdot)$, bilden ein kommutatives Monoid. Zeigen Sie, dass die Kürzungsregel gilt.
   (b) Finden Sie durch unbestimmten Ansatz eine formale Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ über $\mathbb{Z}_p$, sodass

$$(1 + x) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) = 1$$

   gilt. (Beweis für für die zweite Aussage in Satz 17.4 b)