UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

8. Übungszettel, 13. Mai 2013

1. Sei G eine Gruppe, $g \in G$. Zeigen Sie mindestens 2 der folgenden 4 Sätze.
   (a) Durch $k \mapsto gkg^{-1}$ wird ein Automorphismus von G definiert.
   (b) Für jede Untergruppe K und jedes $g \in G$, ist gKg^{-1} wieder eine Untergruppe, und K ist genau dann normal, wenn für alle g gilt: $gKg^{-1} = K$.
   (c) Ist K die einzige Untergruppe der Ordnung $|K|$, dann ist K normal.
   (d) Ist K eine Untergruppe des Zentrums, dann ist K normal; insbesondere ist $Z(G)$ stets normal.
2. Wählen Sie 17 und 11 als „große“ Primzahlen, und verschlüsseln und signieren Sie damit eine Nachricht Ihrer Wahl.
3. Finden Sie alle Lösungen von
$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 3, \\ x &\equiv 1 \pmod 7. \end{aligned}$$
4. Sei $f = x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 3x + 3$, $g = x^2 + x + 2$. Berechnen Sie $f + g$, $\mathrm{Gd}(f - g)$, $\mathrm{Gd}(f \cdot g)$ und bestimmen Sie Polynome q, r, mit $\mathrm{Gd}\, r < \mathrm{Gd}\, g$ sodass $f = q \cdot g + r$. Ist g ein Teiler von f? Lösen Sie die Aufgabe sowohl unter der Annahme $f, g, q, r \in \mathbb{Z}[x]$ als auch $f, g, q, r \in \mathbb{Z}_5[x]$. Vergleichen Sie die Rechnungen auch mit der Division von 1346633 durch 112.
5. Finden Sie Polynome r und s, sodass
$$r \cdot (x^2 + 1) + s \cdot (x^3 - 1) = 1.$$
   Lösen Sie das Problem sowohl für Polynome in $\mathbb{Z}[x]$ als auch $\mathbb{Z}_2[x]$.