UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

7. Übungszettel, 7. Mai 2013

1. Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 1323 Elementen.

2. Zeigen Sie: Sei G eine Gruppe und T eine Untergruppe von G mit Index 2. Dann ist T ein Normalteiler von G.
   Hinweis: Betrachten Sie sowohl die Linksnebenklassen $g \circ T$ als auch die Rechtsnebenklassen $T \circ g$ von G. Im Skript werden die Nebenklassen als Linksnebenklassen eingeführt. Analoge Aussagen gelten auch für die Rechtsnebenklassen.

3. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und T ein Normalteiler von G.

   (a) (Satz 12.14) Zeigen Sie, dass $\sim_T$ gegeben mit

   $$g_1 \sim_T g_2 :\Leftrightarrow g_1 \circ g_2^{-1} \in T$$

   eine mit $\circ$ verträgliche Äquivalenzrelation ist.

   (b) (Satz 12.19 b) Zeigen Sie, dass $\pi : G \to G/T$ mit $g \mapsto K_g$ ein Epimorphismus mit Kern T ist.

4. Wir betrachten die Quaternionengruppe $Q = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ mit $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $ba = a^3b$ (wobei für je zwei Elemente aus Q gilt, dass sie verschieden sind).

   (a) Identifizieren Sie für alle Elemente aus Q das jeweilige inverse Elemente.

   (b) Zeigen Sie, dass die Quaternionengruppe nicht abelsch ist.

   (c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von Q.

   (d) Zeigen Sie, dass alle Untergruppen Normalteiler sind.

   (e) Geben Sie für einen (nicht-trivialen) Normalteiler T die Faktorgruppe Q/T an, d.h. sowohl die Element von Q/T als auch die Verknüpfung auf Q/T.

5. Wir betrachten die Gruppe $C = \{1, a, b, ab\}$ mit $a^2 = 1$, $b^2 = a$, $ba = ab$ (wobei für je zwei Elemente aus C gilt, dass sie verschieden sind).

   (a) Überprüfen Sie, ob es sich bei C tatsächlich um eine Gruppe handelt.

   (b) Kann es sich bei C um eine nichtabelsche Gruppe handeln? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (a) mit „12.12 Die kleinen Gruppen“.

   (c) Zu welcher Gruppe ist C isomorph? Geben Sie auch einen Isomorphismus an!